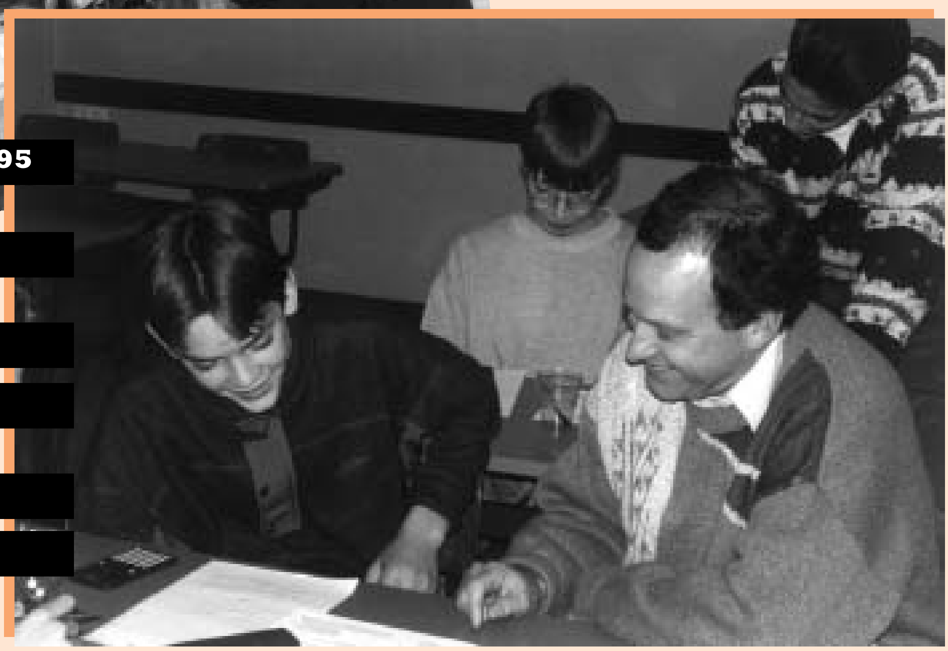
Orgaan van de
Nederlandse Vereniging
van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 71
1995-1996 februari
5





Examens vbo/mavo 1995

De Mercator-projectie

Mathematische
Modelleercompetitie

34e Nederlandse
Wiskunde Olympiade

EUCLIDES

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie: zie ‘Richtlijnen voor auteurs’ op bladzijde 166. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-4539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden.
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks, De Schalm 19, 8251 LB Dronten, tel. 0321-312543.
Gironummer voor contributie: 143917 t.n.v. Ned. Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

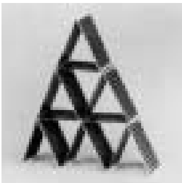
Abonnementen niet-leden

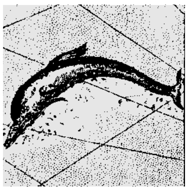
Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Advertenties sturen naar:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg; tel. 0315-324337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht; tel. 078-6145522.

Inhoud







70

70 een booleaans getal

Een *boolean* getal, eigenlijk een booleaans geheel getal, is een getal dat is te schrijven als het product van priemgetallen tot de macht 1. Aangezien $70 = 2 \times 5 \times 7$ is 70 een booleaans getal.
Het is daarbij niet priem en evenmin *semi-priem*. Dat laatste wil zeggen dat het geen product is van twee verschillende priemgetallen.
Het aantal delers van zo'n getal is 2^p waarbij p het aantal priemfactoren is. Bij 70 is $p = 3$ en $2^3 = 8$. U kunt zelf controleren dat 70 inderdaad zoveel delers heeft.
Hoewel wij 70 een even getal noemen wordt het in de Engelse literatuur toch een oneven soort getal genoemd. De reden hiervan is dat 70 het product is van een oneven aantal priemgetallen zoals hierboven al te zien was.
In een vorige aflevering hebt u gezien hoe het getal 70 voortgebracht kan worden. Er is nog een voortbrenger van 70, nl. 62. Dat gaat als volgt: $62 + (6 + 2) = 70$.
Om deze reden wordt 70 ook nog een *sociaal* getal genoemd. Niet te verwarren met het Engelse sociable. Zo zijn 220 en 284 *sociable numbers*, je zou kunnen zeggen gezellige getallen. Heeft een getal geen voortbrenger dan wordt het een *eenzaam* getal genoemd.
In het algemeen zit dat zo: stel a, b en c zijn cijfers. Dan is abc een voortbrenger van d indien geldt dat $abc + (a + b + c) = d$.
Er zijn getallen met meer dan één voortbrenger, bijv. 15 en 101.
Eerder zag u al dat 7 een factor is van 70 en om deze reden heet 70 wel een '*zichtbare factor*'-getal.

Sjoerd Schaafsma

In 1995 zijn de wiskunde-examens vbo/mavo volgens het reguliere én volgens het nieuwe programma afgenomen. In dit artikel gaat het over het eerste tijdvak.

Examens vbo/mavo 1995

Gert Bakker *

Wiskunde vbo/mavo-C/D regulier programma

De belangrijkste resultaten van het C- en D-examen 1995 als geheel zijn opgenomen in tabel 1. De resultaten van de afzonderlijke vragen zijn vermeld in de tabellen 2 en 3. De tabellen zijn aan het eind van het artikel afgedrukt. Van de vragen die in beide examens identiek waren, worden er zes besproken.

Op D-niveau bleken de meerkeuzevragen gemakkelijker te zijn dan ooit te voren. De kandidaten haalden gemiddeld 70% van de punten! De moeilijkheidsgraad van de open vragen lag met 45% op het gemiddelde van de periode 1987 t/m 1993. Het verschil in moeilijkheidsgraad tussen gesloten en open vragen was dit jaar erg groot. Op vier van de elf open vragen behaalden de kandidaten gemiddeld minder dan 40% van de beschikbare punten. Vooral de slotvraag met een context over een buitenlamp die de slaapkamer van de achterburen binnenschijnt, werd zeer moeilijk gevonden.
De Cevo stelde de cesuur vast op 54/55, waarmee het gemiddelde cijfer op 6,2 en het percentage onvoldoendes op 30 kwam. Alleen in het jaar 1990 met een extreem gemakkelijk examen was dit percentage lager.

Op C-niveau bleek het meerkeuze gedeelte gemakkelijk te zijn. De kandidaten haalden hierop 58% van de punten. Dat hoge percentage werd alleen bereikt in 1990 en 1993. Het open vragen gedeelte bleek zelfs beduidend makkelijker te zijn dan in alle voorgaande jaren. Men haalde hierop 52% van de punten. Het verschil in moeilijkheidsgraad tussen gesloten en open

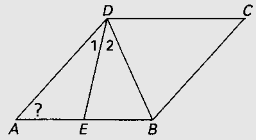
2p **1** ■ Los op: $4x - 3 = 2x + 5$.
Het antwoord ligt tussen
- A $-4\frac{1}{2}$ en $1\frac{1}{2}$
- B $1\frac{1}{2}$ en $2\frac{1}{2}$
- C $2\frac{1}{2}$ en $4\frac{1}{2}$
- D $4\frac{1}{2}$ en $6\frac{1}{2}$

2p **4** ■ Los op: $x^2 + 21x + 90 = 2x$.
De oplossingen zijn
- A 5 en 18
- B 6 en 15
- C 9 en 10
- D −15 en −6
- E −18 en −5
- F −10 en −9

Hiernaast is een ruit $ABCD$ getekend.
$\angle D_1 = \angle D_2$.

2p 13 ■ Bereken $\angle A$ in het geval dat $\angle D_2 = 32°$.
Het antwoord is
- A 32°
- B 48°
- C 52°
- D 58°
- E 64°

figuur



vragen is voor C-niveau nog nooit zo klein geweest.
Met de cesuur 54/55 kwam het gemiddeld cijfer op 6,0 en het percentage onvoldoendes op 35, lager dan in voorgaande jaren.

Bij de jaarlijks door de NVvW georganiseerde besprekingen bleek dat de docenten de examens in grote lijnen goed ontvangen hadden. Er was een goede spreiding over de leerstof. Over het verschil tussen C- en D-niveau was men tevreden. De kandidaten hadden hun tijd wel hard nodig om het werk af te krijgen. Zowel bij het C- als het D-examen werden dit jaar vraagtekens geplaatst bij de context in de laatste opgave. Deze ging over een buitenlamp (D) en rondrijdende modeltreintjes (C). Hierbij speelden gelijkvormige driehoeken en evenredigheden een rol. Sommigen merkten op dat deze contexten meer zouden passen bij natuurkunde, basisvorming of het nieuwe programma.

Meerkeuzevragen uit C- en D-examen, regulier programma

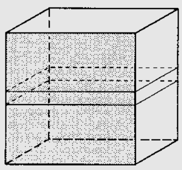
Vraag 1 was duidelijk bedoeld als geruststellende binnenkomer. Deze eerstegraads vergelijking werd door 87% van de C- en 93% van de D-kandidaten goed opgelost. Meisjes scoorden beter dan jongens.
In vraag 4 moest een tweedegraads vergelijking opgelost worden: herleiden op 0, ontbinden, oplossingen aflezen. Van de C-kandidaten vergat ongeveer 15% de eerste stap, terwijl een kwart tot eenderde zich bij het aflezen vergiste in het teken. Bij C beantwoordde 55% de vraag goed; bij D lag dat percentage met 81 veel gunstiger. Op beide niveaus scoorden de meisjes beter dan de jongens. Uit analyses van het Cito bleek dat vraag 4 zeer goed onderscheid maakte tussen goede en minder goede kandidaten.

Vraag 13 waar de eigenschappen van de ruit een belangrijke rol spelen, werd slecht gemaakt: slechts 26% bij C en 40% bij D gaf het goede alternatief aan. Een vraag over de berekening van hoeken in een vlakke figuur is heel gebruikelijk op het examen. Veel kandidaten gingen er waarschijnlijk van uit dat $AD = BD$, of namen misschien domweg het complement van hoek D, of gingen hoek A meten of schatten in plaats van berekenen.
Vraag 16 over het netwerk van een kubus werd heel goed gemaakt: 76% bij C en 82% bij D koos het goede alternatief. Alternatief B was de meest gekozen fout. In het nieuwe programma zou zo'n vraag ook goed kunnen, wanneer de kandidaten zelf de strepen in het netwerk zouden moeten tekenen.

Vraag 17 gaat over het berekenen van de inhoud van een prisma. De gemaakte fouten waren dat de oppervlakte van het grondvlak vermenigvuldigd werd met A $3\frac{1}{2}$, B 4, D 6 en E 7. De vraag werd goed gemaakt, maar het verschil jongens/meisjes was bij deze vraag opvallend groot. Bij C gaf 66% van de jongens en 42% van de meisjes het goede antwoord. Bij D waren die percentages respectievelijk 77 en 61. Deze en de volgende vraag maakten zeer goed onderscheid tussen goed en minder goed op deze examens voorbereide kandidaten.

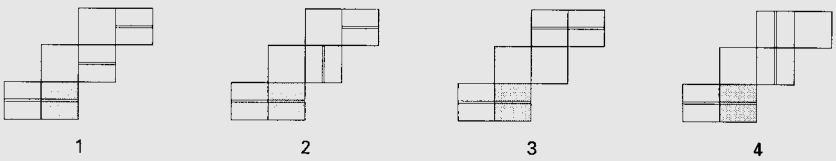
Van een kubusvormig doosje is het voorvlak grijs. Op het doosje is een dubbele streep getekend. Zie de figuur.

figuur



2p 16 ■ Welke figuur is een (verkleinde) uitslag van dit doosje?

figuren

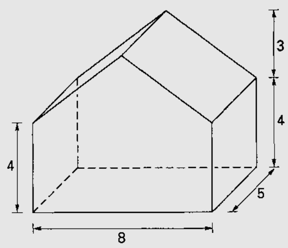


- A figuur 1
- B figuur 2
- C figuur 3
- D figuur 4

Uit een balk van 8 bij 5 bij 7 cm is een prisma gezaagd. Zie de figuur.

2p 17 ■ Bereken de inhoud van het prisma.
Het antwoord is
- A 140 cm^3
- B 160 cm^3
- C 220 cm^3
- D 240 cm^3
- E 280 cm^3

figuur

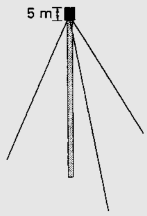


Vraag 18 heeft de kabels van een zendmast als onderwerp. De kandidaten hadden voldoende ruimtelijk inzicht om deze vraag goed te maken. Bij C koos 76% het goede alternatief en bij D 85%.

Hiernaast is een zendmast getekend die 65 m hoog is. 5 meter onder het hoogste punt zijn drie stalen kabels bevestigd.
Op 30 meter afstand van de mast zijn de kabels in de grond vastgemaakt.

2p **18** ■ Bereken hoe lang zo'n kabel is (afronden op een geheel getal).
Het antwoord is
- A 52 m
- B 58 m
- C 67 m
- D 72 m
- E 76 m

figuur



Wiskunde vbo/mavo-C/D, nieuw programma

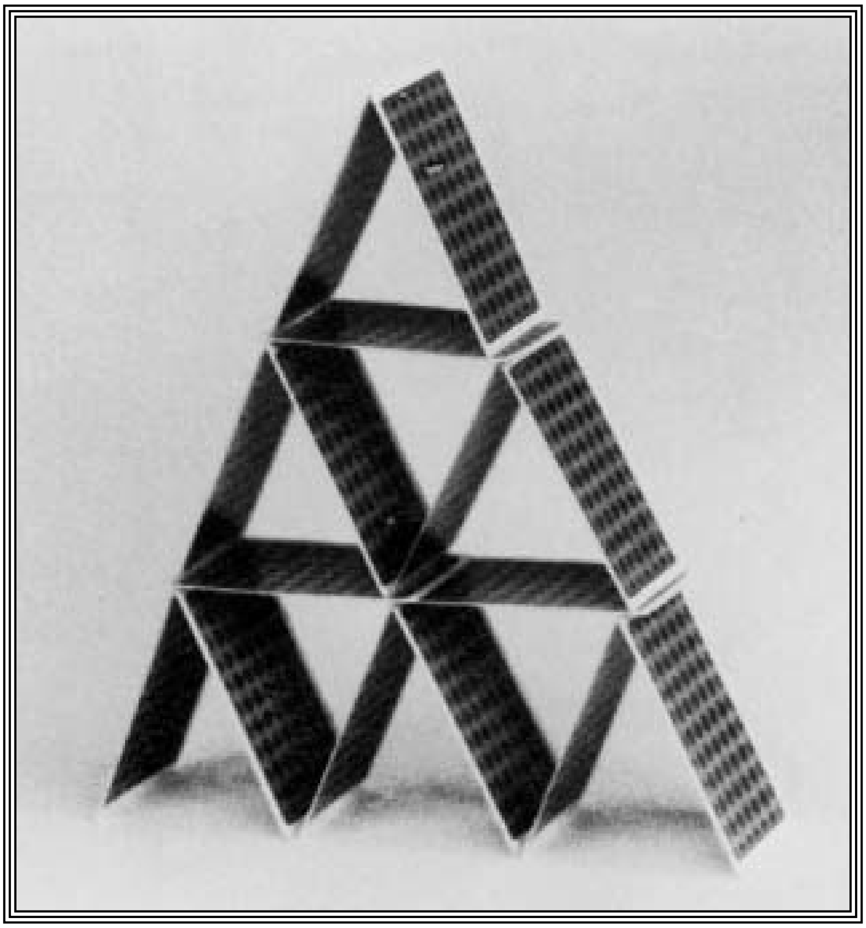
In 1995 werd op 11 scholen examen gedaan volgens het nieuwe programma (dit programma is afgedrukt in Uitleg O en W regelingen nr. 31b d.d. 21 december 1994). In 1997 zal op alle scholen volgens dit nieuwe programma geëxamineerd worden. Uitgangspunt voor het nieuwe programma is dat de meeste leerlingen na vbo/mavo de wiskunde uitsluitend als hulpmiddel tegenkomen voor het oplossen van niet-wiskundige problemen. In het nieuwe programma worden problemen meestal aangeboden door middel van contexten buiten de wiskunde, die herkenbare en inleefbare situaties betreffen. De wiskunde wordt vooral toepassingsgericht, terwijl abstracties, vooral voor het C-niveau, sterk worden beperkt.

Het nieuwe programma onderscheidt vier domeinen: A: algebra, B: rekenen (het onderhouden, uitbouwen en verdiepen van vaardigheden uit het basisonderwijs), C: meetkunde en D: informatieverwerking/statistiek. De leerstof en vaardigheden uit deze domeinen komen in de opgaven ook geïntegreerd voor.

De examens volgens het nieuwe programma kwamen op de gebruikelijke manier tot stand. De constructiegroep van het Cito maakte de voorstellen. De vaksectie wiskunde vbo/mavo-C/D van de Cevo stelde deze vervolgens vast. Vijf mensen die nauw betrokken waren bij de totstandkoming van het nieuwe programma, zorgden met de nodige screening voor een goede afstemming van het examen op de doelstellingen van dat programma en de stand van zaken in de onderwijspraktijk van de experimenteerscholen.

Het D-examen telde 26 vragen, verdeeld over zeven opgaven. Onderwerpen waren: kaartenhuizen; vakkenpakket; Coopertest; breiwerk; zon en schaduw; boottocht; hoogtelijnkaart. De eerste vier opgaven van het D-examen zijn als voorbeelden afgedrukt en worden verderop besproken. Dit examen is gemaakt door 284 kandidaten. De resultaten bleven achter bij de verwachtingen.
De cesuur ging bij dit examen naar 51/52. Het percentage onvoldoendes kwam hiermee van 39 op 30. Dit is hetzelfde percentage als bij het reguliere programma.

Het C-examen bestond uit 27 vragen, verdeeld over zeven opgaven. Daarin kwamen aan de orde: kaartenhuizen; vakkenpakket; breiwerk; zon en schaduw; boottocht; huisdieren (aantallen en kosten in dia-



grammen); tandpasta (materiaalbesparing door invoering van de statube). Er namen 145 kandidaten deel aan dit examen. De resultaten vielen ook hier tegen. Misschien was de vraagstelling in een paar gevallen wat moeilijk of de hoeveelheid werk aan de ruime kant. De cesuur is met 6 scorepunten verschoven naar 48/49 waarmee het percentage onvoldoendes van 55 op 35 kwam. Ook bij het reguliere programma waren er 35% onvoldoendes.

Vier opgaven in het C- en D-examen hadden betrekking op dezelfde context. Bij C staan vaak extra inleidende vragen, terwijl bij D dikwijls een wat ingewikkelder slotvraag voorkomt.
In de C- en D-examens kwamen acht identieke vragen voor (28 punten). D-kandidaten behaalden op deze zogenaamde overlapvragen 61% van de punten en C-kandidaten 47%.

Op een door het APS georganiseerde bijeenkomst van docenten bleek dat de examens in grote lijnen goed waren ontvangen. Bij enkele vragen werden wat opmerkingen gemaakt. Het domein algebra had misschien wat meer aandacht moeten krijgen.

In tabel 4 staan enkele resultaten van het nieuwe examen voor C en D.
Hierna volgt een bespreking van de vier afgedrukte opgaven uit het D-examen volgens het nieuwe programma.

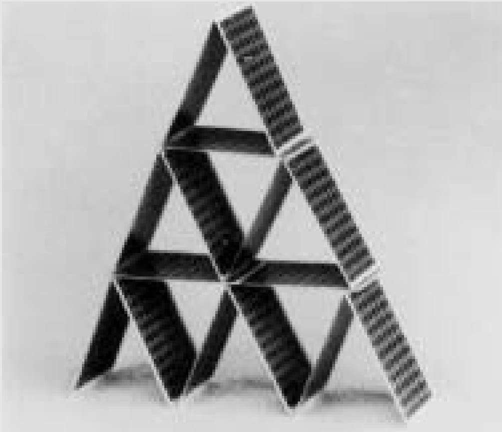
Context-vragen uit het D-examen, nieuw programma

'Kaartenhuizen' is een opgave uit domein A algebra. In het oude programma betreft de algebra een vrij systematische behandeling van eerstegraads en tweedegraads functies en relaties. In het nieuwe programma maakt de leerling kennis met allerlei soorten verbanden, bijvoorbeeld exponentiële, gebroken, periodieke en wortelverbanden, meestal vanuit contexten. Het in- of expliciet verband tussen de variabelen in de context ligt in een beschreven situatie, een tabel, een formule of een grafiek. In de nieuwe algebra zijn deze vier representatievormen en de verschillende overgangen daartussen van groot belang. Bijvoorbeeld uit een formule een andere formule afleiden, uit een situatie een tabel afleiden, om maar twee van de zestien mogelijkheden te noemen.
In de opgave 'Kaartenhuizen' kon de kandidaat zich met de eerste vraag inleven in de beschreven situatie. Mogelijk zag hij/zij via *aantal kaarten vierde etage* = 4×2 + (4−1) al hoe het verder zou gaan met de toename van het aantal kaarten. Het meest voor de hand liggend was dat de kandidaat voor de beantwoording van vraag 2 een tabel maakte voor het totaal aantal kaarten bij 1, 2, 3, 4, 5, … verdiepingen.
Daarna hadden de examenmakers kunnen vragen de formule op te stellen van het genoemde verband, wat mogelijk een moeilijke vraag zou zijn. Ze kozen er deze keer voor de formule te geven om daar twee vragen over te stellen. Vraag 3 is dan een voor de hand liggende vraag. Vraag 4 gaat duidelijk verder, vooral omdat het met 208 kaarten (vier kaartspelen) niet precies 'uitkomt'.

Kaartenhuizen

Op de foto zie je een driehoekig kaartenhuis. Daarvoor waren 15 kaarten nodig.

foto



2p **1** □ Hoeveel kaarten zijn er nodig voor een kaartenhuis van vier verdiepingen?

Rob hield een wedstrijd met zijn vader en moeder wie het hoogste kaartenhuis kon bouwen.
Rob heeft één verdieping meer dan moeder; moeder heeft één verdieping meer dan vader.
Moeder gebruikte 17 kaarten meer dan vader.

5p **2** □ Hoeveel kaarten gebruikte Rob meer dan moeder? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Voor kaartenhuizen geldt de volgende formule:

$K = 1{,}5\,V^2 + 0{,}5\,V$ — *K* is het totaal aantal kaarten; *V* is het aantal verdiepingen

Iemand beweert dat hij een huis kan bouwen van wel 18 verdiepingen hoog!

3p **3** □ Bereken hoeveel kaarten hij dan nodig zou hebben. Schrijf je berekening op.

Je hebt 208 kaarten.

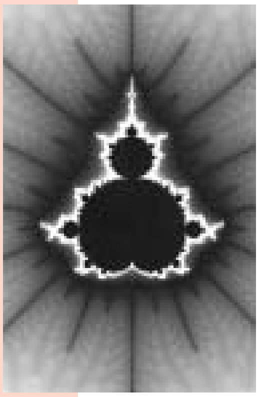
4p **4** □ Hoeveel verdiepingen hoog zou je daarmee maximaal kunnen komen? Leg je antwoord uit.

Korrel

Snelheid

Wij zijn verwend. Het is al een paar keer gebeurd, dat nieuwe leerplannen pas werden ingevoerd nadat ze waren uitgeprobeerd. We zijn gaan geloven dat dat zo hoort.
De moderne onderwijskunde leert anders. Het uitproberen gebeurt op een te gering aantal scholen om statistisch van betekenis te kunnen zijn. En je moet het onderwijs vastleggen met behulp van kerndoelen en eindtermen. Dan weet iedereen wat er moet gebeuren.
De sof met de bavo-toetsen vergeten we even. Een probleem op uitvoeringsniveau.
Er komen nu twee grote veranderingen, die beide al in 1998 worden ingevoerd. Dat gaat bijna zo snel als het verdwijnen van de ziektewet.
Voor de bovenbouw van het havo en vwo komen er vier profielen, wordt gezegd. Vakontwikkelgroepen hebben hun werk er al op zitten. Eindterm-deskundigen gaan nog de laatste hand leggen aan de leerplannen. Daar helpt geen Profiproject (zie Euclides 71-4) aan.
In het mavo en vbo worden de zgn. leerwegen geïntroduceerd. Ook hier zullen niet-wiskundigen ons vertellen hoe de wiskunde-leerplannen eruit komen te zien.
Onze vereniging heeft fatsoenlijke invoering van nieuwe leerplannen gevraagd. Zeer terecht. Leerplanvernieuwing zonder leraren erbij te betrekken kan niet.

M. van Hoorn



Deze context geeft natuurlijk aanleiding tot 1001 vragen, maar in een examen moeten de verschillende vragen bij een context redelijk onafhankelijk zijn. Ook moet ervoor gezorgd worden dat het aantal contexten niet te gering is, anders zou de prestatie te veel afhangen van de toevallig aangeboden contexten.
De percentages behaalde punten op de vier vragen waren goed: 86, 57, 93 en 63. (In de opgave 'Boottochten' komen het interpreteren en het tekenen van grafieken aan de orde.)

'Vakkenpakket' is een opgave uit domein D informatieverwerking. Alfred moet uit vijf schoolvakken er nog drie kiezen. Deze vraag konden de kandidaten beantwoorden door het aantal mogelijkheden systematisch uit te schrijven: abn, abs, abw, ans, enzovoort. Voor de tien gevonden mogelijkheden is er een beperkende voorwaarde: als in een gekozen combinatie n voorkomt, moet ook w voorkomen. Blijven er netto zeven mogelijkheden over. Deze opgave over systematisch tellen (ook wel combinatorisch tellen genoemd) was wat complexer dan men tot nu toe in het examen gewend was. Had er misschien een inleidende vraag moeten staan over Roos die uit de vakken Frans, Duits, biologie en geschiedenis er nog twee moest kiezen? Zeker voor D-niveau lijkt het vanzelfsprekend dat ook eens een wat complexere vraag direct gesteld wordt zonder inleidende vragen.
Het resultaat viel tegen: men behaalde maar 41% van de punten.

'Coopertest' komt ook uit domein D statistiek. Belangrijke representatievormen in de statistiek zijn diagrammen zoals lijn-, staaf- en cirkeldiagrammen. Geheel nieuw in het programma zijn het steelbladdiagram en de boxplot.
Een boxplot is in veel gevallen een ideaal middel om de grootte en spreiding van een aantal waarne-

Vakkenpakket

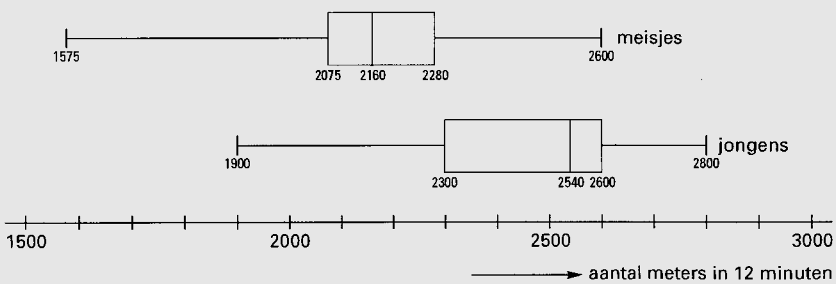
Alfred zit in de derde klas van de MAVO. Hij moet in zes vakken examen doen.
Hij neemt in ieder geval de vakken Nederlands, Engels en Duits.
Hij twijfelt nog tussen aardrijkskunde, biologie, natuurkunde, scheikunde en wiskunde.
Als hij natuurkunde kiest, moet hij ook wiskunde nemen.

5p **5** □ Uit hoeveel verschillende vakkenpakketten kan hij nog kiezen? Licht je antwoord toe.

Coopertest

Een Coopertest is een conditietest waarbij men kijkt hoeveel meter je in 12 minuten kunt lopen.
Aan een Coopertest doen 120 meisjes en 120 jongens mee. De resultaten van deze test zie je in de volgende boxplots.

boxplots



2p **6** □ Hoe groot is het aantal meisjes dat in 12 minuten meer dan 2075 meter liep?

Er waren vier meisjes langzamer dan de langzaamste jongen.
4p **7** □ Bereken hoeveel procent van alle deelnemers tussen de 1900 en 2600 meter in 12 minuten liep. Schrijf je berekening op.

Vergelijk de resultaten van de 60 snelste meisjes met die van de 60 langzaamste jongens.
4p **8** □ Is het mogelijk om met deze boxplots na te gaan wie gemiddeld het snelst zijn, deze 60 meisjes of deze 60 jongens? Licht je antwoord toe.

mingen overzichtelijk weer te geven. In één oogopslag krijg je zo een goed beeld, vooral als je waarnemingen van meer groepen met elkaar wilt vergelijken. De prijs die je echter moet betalen, is evenwel verlies aan informatie: de waarnemingsgetallen zelf heb je waarschijnlijk niet of niet meer en bij de test was je wellicht niet aanwezig. Anders had je nog het gedrag in je kunnen opnemen van de onderlinge afstanden: zijn die mooi gespreid of vallen er grote gaten? Daarover gaat vraag 8: winnen de 60 snelle meisjes het van de 60 langzame jongens? Elke verantwoord opgebouwde redenering levert hier vier scorepunten op, ongeacht of deze tot een bevestigend of een ontkennend antwoord leidt.

De vragen 6 en 7 komen overeen met het afvragen van kennis en vaardigheden zoals leerlingen dat op school gewend zijn (reproduktieve vragen). Vraag 8 is een produktieve vraag: van de kandidaten werd gevraagd hun kennis en vaardigheden toe te passen in een nieuwe situatie die ze vermoedelijk zo niet eerder in het onderwijs zijn tegengekomen.
De kandidaten behaalden respectievelijk 67%, 57% en 31% van de punten.

'Breiwerk' is een mengeling van vragen uit domein B rekenen en C meetkunde. In de nieuwe meetkunde is het rekenen, meten en schatten ten aanzien van allerlei objecten en hun plaats in de ruimte belangrijk. Begrippen die bij dit domein aan de orde komen zijn bijvoorbeeld richting, kijklijn, aanzicht, uitslag en plattegrond.



Breiwerk

tekst en foto

Een veelzijdig kledingstuk in uw garderobe is het gilet!

Het past in elke modestijl en het geeft een eenvoudige combinatie iets heel bijzonders.



Mirjam gaat een gilet (hesje) breien. Op de bijlage bij de vragen 9, 12 en 13 is het patroon van dat gilet getekend. De maten staan erbij in cm.
Mirjam breit eerst een proeflapje. Met de wol die zij gebruikt, moet zij voor 10 cm breedte 22 steken opzetten en voor 10 cm lengte 24 naalden breien.

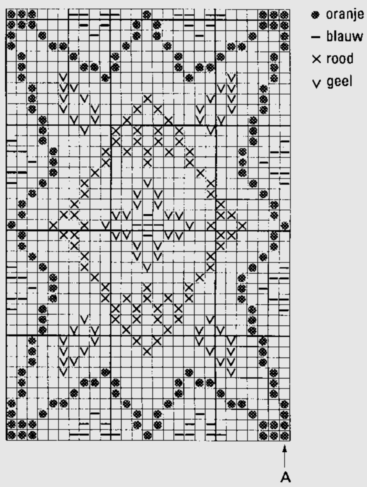
Het rugpand moet 56 cm breed worden.

2p **9** ☐ Bereken hoeveel steken Mirjam daarvoor moet opzetten. Schrijf je berekening op.

Als je geen antwoord hebt gevonden bij vraag 9, neem dan 131 steken.

Wanneer Mirjam het rugpand af heeft, wil zij midden op dit rugpand een motief borduren. Dat motief is hiernaast op ruitjes getekend. Elk hokje is één steek van het breiwerk.

figuur



Mirjam wil met het motief bij borduursteek A beginnen.

4p **10** ☐ Bereken hoeveel steken vanaf de rechterkant van het rugpand dat is. Schrijf je berekening op.

Volgens Mirjam worden de afmetingen van het borduurmotief op het rugpand ongeveer 12 bij 17 cm.

3p **11** ☐ Ga met een berekening na of dit klopt. Leg je antwoord uit.

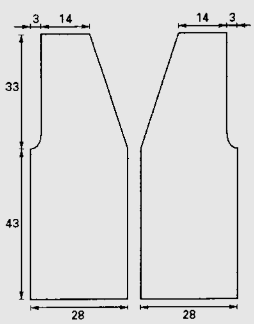
Langs de voorkant en de hals van het gilet wil Mirjam een sierband naaien, zoals op de foto hierboven.

4p **12** ☐ Teken in de patronen op de bijlage waar de sierband vastgenaaid moet worden.

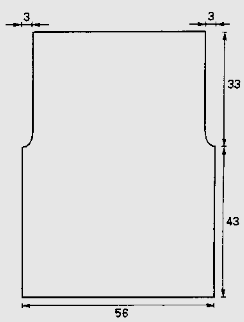
Mirjam heeft nog 1,75 m sierband in huis.

6p **13** ☐ Ga na of dit voldoende is voor het afwerken van het gilet. Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Bijlage bij de vragen 9, 12 en 13



patroon voorpanden



patroon rugpand

De opgave ‘Breiwerk’ gaat over het breien van een gilet (was toen helemaal in), het borduren (eigenlijk inmazen, een te moeilijk woord) van een motief op het rugpand en het vastnaaien van een sierband. Zulk soort contexten komen misschien minder voor, maar ze zijn niet nieuw. Ook op het examen kwam eerder al een context voor over een cirkelrok en over bijzettafeltjes met een rond en vierkant kleed. Een reactie die sommigen op deze opgave gaven, was dat dit een typische meisjes-opgave zou zijn. De resultaten bevestigen die indruk geenszins. De meisjes behaalden hier 55% van de punten en de jongens 59%; op het examen als geheel waren deze percentages respectievelijk 49% en 57%. Mogelijk nog meer dan bij de andere opgaven, was bij deze opgave extra aandacht besteed aan het woordgebruik en de formuleringen. De situatie wordt nauwkeurig beschreven en ondersteund door figuren en bijschriften. Vraag 12 leverde soms wel wat moeilijkheden op, want hoe gaat zo’n sierband nou eigenlijk over van voorpand op rugpand?
De percentages behaalde punten waren 85, 50, 48, 65 en 51.
(Andere opgaven over meetkunde zijn ‘Zon en schaduw’ over richting en hoogte van de zon en ‘Naar de top’ met een hoogtelijnkaart.)

Syllabus

In 1997 worden de diverse vakken op vbo en mavo voor het eerst geëxamineerd volgens nieuwe programma’s. De nieuwe examenprogramma’s kenmerken zich onder andere door de aansluiting op de kerndoelen van de basisvorming, de presentatie binnen domeinen en subdomeinen van eindtermen en de expliciete formulering van een aantal vaardigheden.
Vooral voor wiskunde zijn de veranderingen in het programma zeer ingrijpend, getuige ook de in dit artikel opgenomen voorbeelden.
De Cevo ontwikkelt momenteel met medewerking van het Cito syllabi voor de verschillende vakken. In de syllabus voor wiskunde worden onder andere toelichtingen gegeven bij de eindtermen. Hierbij is uitgegaan van het rapport van de toenmalige COW. Daarnaast worden allerlei andere zaken vermeld die van belang zijn om de leerlingen voor te bereiden op het examen. De verwachting is dat de syllabus begin 1996 verschijnt.

Noot

* De auteur is werkzaam bij het Cito.

	mavo/vbo-D	mavo/vbo-C
aantal kandidaten in steekproef	2375	2677
gemid. p-waarde identieke vragen	75,6	64,8
gemid. p-waarde meerkeuzevragen	69,6	58,3
gemid. p’-waarde open vragen	45,4	52,4
gemid. p’-waarde totaal	57,3	55,3
gemid. score meerkeuzevragen	30,6	25,7
gemid. score open vragen	20,9	24,1
gemid. score totaal (+ 10)	61,5	59,8
gemid. score meisjes	60,5	57,3
gemid. score jongens	62,2	61,6
door Cevo vastgestelde cesuur	54/55	54/55
gemiddeld cijfer	6,2	6,0
percentages onvoldoendes	30	35
betrouwbaarheid meerkeuzevragen	0,59	0,67
betrouwbaarheid open vragen	0,69	0,75
betrouwbaarheid totaal	0,76	0,82

Tabel 1 Resultaten regulier programma

	mavo/vbo-D	mavo/vbo-C
aantal kandidaten	284	145
gemid. p’-waarde totaal	53,5	48,0
gemid. score totaal (+ 10)	58,2	53,2
gemid. score meisjes	53,8	51,3
gemid. score jongens	61,1	55,5
door Cevo vastgestelde cesuur	51/52	48/49
gemiddeld cijfer	6,1	5,9
percentages onvoldoendes	30	35
standaarddeviatie	12,4	11,8

Tabel 4 Resultaten nieuw programma

Vraag	Sleutel	P	P- en A-waarden A	B	C	D	E	F
1	C	93	4	1	93*	2		
2	B	88	2	88*	2	1	2	5
3	B	80	3	80*	7	8	2	
4	F	81	1	1	10	3	3	81*
5	B	51	13	51*	19	4	6	6
6	A	56	56*	2	19	10	12	
7	D	65	15	8	12	65*		
8	D	58	8	12	22	58*		
9	A	51	51*	23	11	5	7	4
10	A	41	41*	8	7	8	35	
11	B	78	1	78*	5	2	14	
12	C	87	4	1	87*	7	1	0
13	C	40	3	16	40*	35	6	
14	E	50	7	9	10	9	50*	15
15	A	70	70*	8	8	9	6	
16	D	82	4	9	5	82*		
17	C	71	4	7	71*	6	12	
18	C	85	2	2	85*	9	2	
19	D	70	5	6	6	70*	12	
20	E	81	11	2	4	1	81*	
21	B	87	7	87*	3	2		
22	C	67	13	10	67*	10		

	Max. score	Gem. score	P’	Relatieve frequenties (in %) 0	1	2	3	4	5	6	7
23	4,00	1,61	40	42	10	14	13	21			
24	7,00	4,65	66	10	2	7	15	6	12	16	32
25	4,00	2,39	60	15	14	14	28	28			
26	2,00	1,33	66	21	26	53					
27	3,00	1,84	61	28	9	12	50				
28	7,00	1,65	24	53	14	8	4	4	5	6	8
29	3,00	0,98	33	61	5	9	25				
30	4,00	0,99	25	70	3	4	5	19			
31	3,00	1,92	64	28	7	9	55				
32	3,00	2,51	84	11	5	4	79				
33	6,00	1,03	17	69	6	9	2	3	4	7	

Aantal kandidaten:	2375
Gemiddelde score:	61,5
Standaarddeviatie:	13,0
Gemiddeld percentage goed:	57,3

Tabel 2 *Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem*

Analyse vragen wiskunde-D mavo/vbo-populatie (regulier)

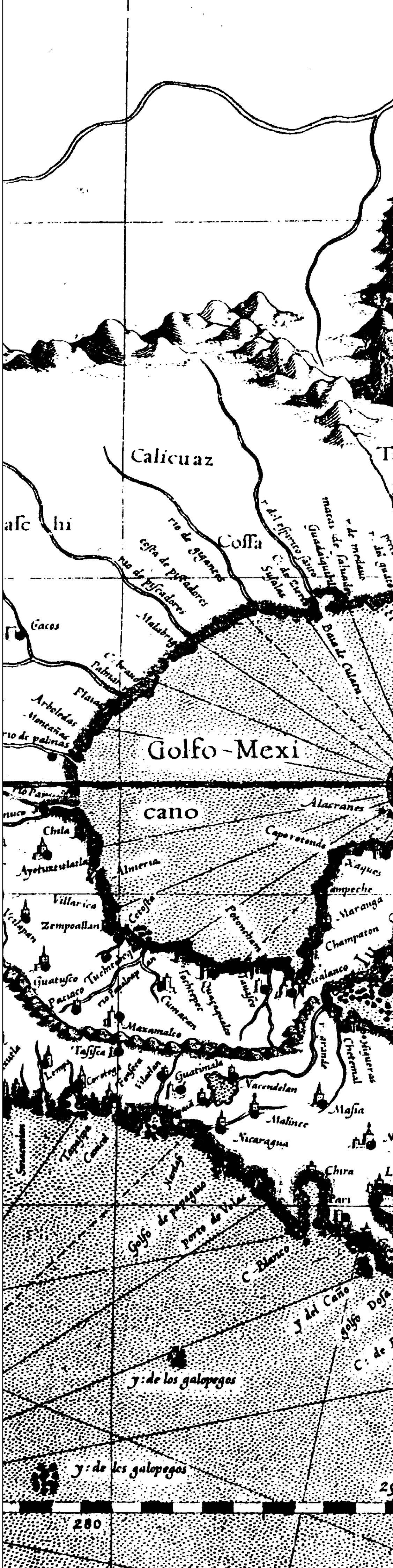
Vraag	Sleutel	P	P- en A-waarden A	B	C	D	E	F
1	C	87	7	3	87*	3		
2	F	62	2	4	3	11	18	62*
3	E	64	8	12	10	6	64*	
4	F	55	6	8	17	7	7	55*
5	F	26	16	15	8	31	3	26*
6	B	70	15	70*	6	9		
7	C	53	10	17	53*	12	7	
8	D	43	10	22	26	43*		
9	A	81	81*	1	0	18		
10	A	43	43*	14	9	23	10	
11	B	77	2	77*	4	2	16	
12	D	65	7	8	14	65*	6	
13	C	26	8	21	26*	36	9	
14	E	55	5	26	10	3	55*	2
15	E	75	2	4	13	6	75*	
16	D	76	5	11	7	76*		
17	C	56	7	10	56*	10	17	
18	C	76	4	4	76*	11	5	
19	B	23	17	23*	34	15	11	
20	D	53	18	4	8	53*	17	
21	C	63	6	19	63*	13		
22	D	53	4	16	13	53*	14	

	Max. score	Gem. score	P’	Relatieve frequenties (in %) 0	1	2	3	4	5	6	7
23	4,00	3,36	84	8	1	10	7	73			
24	5,00	2,46	49	35	5	7	10	14	28		
25	5,00	2,75	55	30	9	5	5	11	39		
26	2,00	0,94	47	42	22	36					
27	3,00	1,52	51	34	16	15	35				
28	2,00	0,85	42	51	13	36					
29	5,00	3,22	64	26	3	4	6	12	49		
30	5,00	2,42	48	41	6	4	4	7	37		
31	4,00	2,38	59	25	5	18	9	42			
32	5,00	2,46	49	27	11	9	12	20	20		
33	3,00	1,08	36	49	19	7	25				
34	3,00	0,69	23	72	5	5	18				

Aantal kandidaten:	2677
Gemiddelde score:	59,8
Standaarddeviatie:	15,9
Gemiddeld percentage goed:	55,3

Tabel 3 *Toets- en itemanalyse-Cito, Arnhem*

Analyse vragen wiskunde-C mavo/vbo-populatie (regulier)

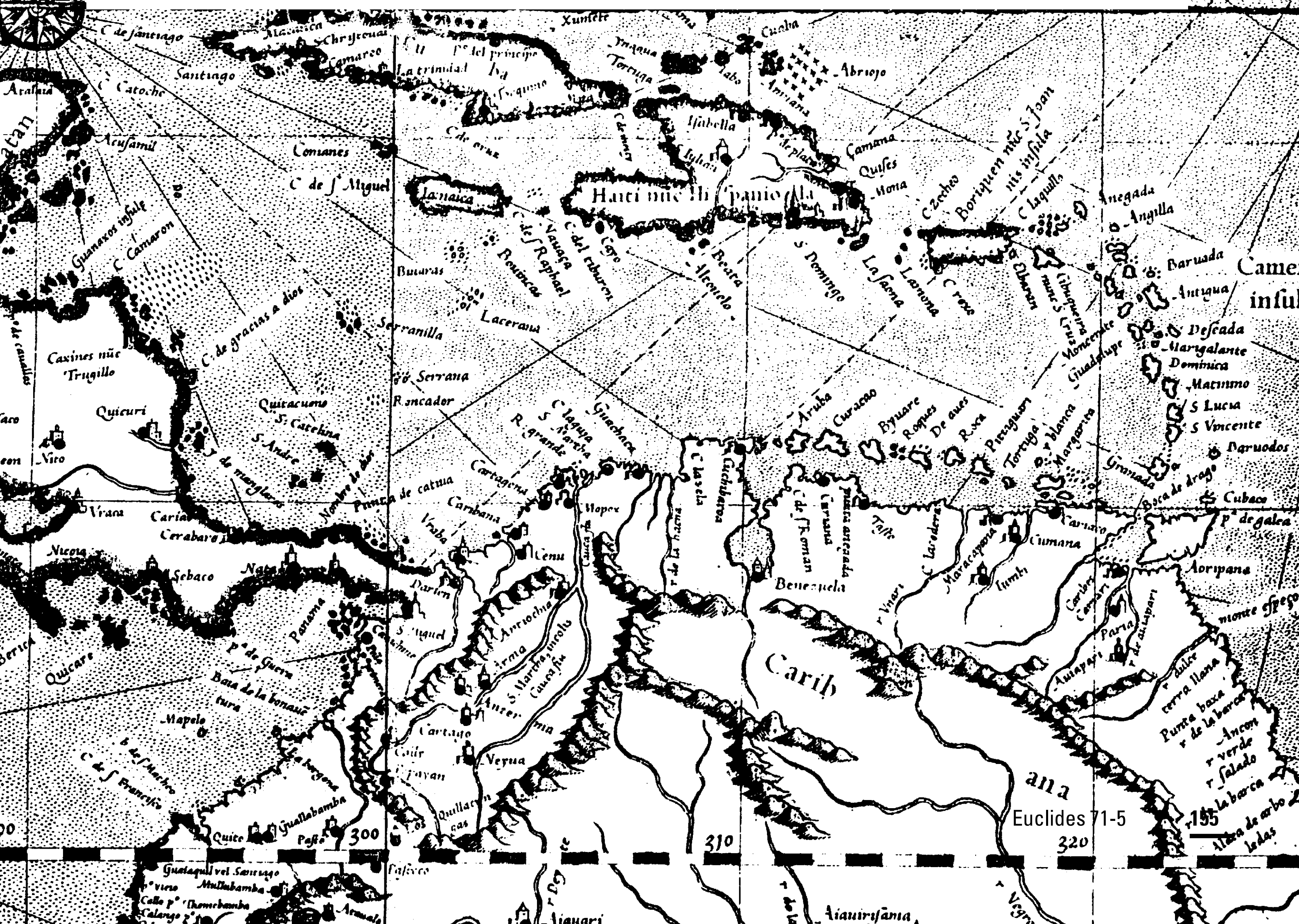


De Mercator-projectie

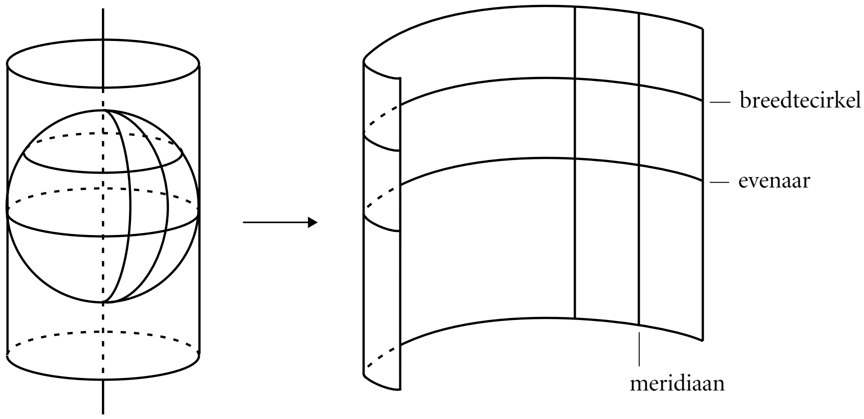
Bert Zwaneveld

Wat was het probleem?

In de zestiende eeuw begon de zeevaart over de oceanen op gang te komen. Daarbij waren goede kaarten onontbeerlijk. Het eerste probleem is dan natuurlijk hoe je een groot deel van de aardbol zoals bijvoorbeeld de Atlantische Oceaan op een plat vlak afbeeldt. Vroeger was de enige manier om op zee koers te houden te varen volgens een vaste kompaslijn, dat is een lijn die een vaste hoek maakt met het noorden, de richting die door het kompas aangegeven wordt. Bij de meeste kaartprojecties is zo'n koerslijn geen rechte lijn, en op de wereldbol ook geen grote cirkel of een breedtecirkel. Op de bol is zo'n koerslijn in feite een soort spiraal. Er was dus behoefte aan een kaart, waarbij zo'n koerslijn een rechte lijn is. De meridianen en breedtecirkels zijn ook koerslijnen, want ze maken een hoek van 0°, dan wel van 90°, met het noorden. De meridianen en breedtecirkels moeten dus in ieder geval rechte lijnen op zo'n kaart zijn. De meridianen die een vast aantal graden verschillen zullen als evenwijdige lijnen op onderling gelijke afstanden worden afgebeeld; het ligt voor de hand ze vertikaal te tekenen. De breedtecirkels worden dan automatisch horizontale lijnen, want ze staan loodrecht op de meridianen. Maar breedtecirkels die een vast aantal graden verschillen, zullen nu natuurlijk niet op onderling gelijke afstanden worden afgebeeld. Iets meer dan 400 jaar geleden overleed Gerard Mercator, eigenlijk Gerhard Kremer (1512-1594). Met de verschijning in 1569 van zijn wereldkaart *Orbis terrae descriptio ad usum navigantium emendata et accommodata* (Beschrijving van de wereldbol voor gebruik door navigeerders, verbeterd en aangepast) was het probleem opgelost.



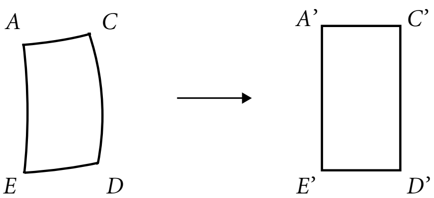
De cilinderprojectie met kromme projectielijnen



Figuur 1 De cilinderprojectie

Zijn kaart is een voorbeeld van een cilinderprojectie. Om de aarde wordt een cilinder gelegd die de aarde in de evenaar raakt. De meridianen worden als vertikale lijnen afgebeeld, de breedtecirkels, inclusief de evenaar, als horizontale cirkels op die cilinder. De loodrechte stand tussen de meridianen en de breedtecirkels is dus bewaard. Door de cilinder langs een meridiaan open te knippen en de cilinder open te rollen ontstaat de kaart. Zie figuur 1.

Bij die cilinderprojectie moest Mercator tegelijk het probleem van de rechte koerslijnen oplossen. Hij projecteerde niet met rechte projectielijnen vanuit het middelpunt of vanuit de as. Zijn werkwijze leidt tot kromme projectielijnen. Hier volgt een beschrijving van die werkwijze. Rekenend vanaf de evenaar zag Mercator zich gesteld voor het probleem om te berekenen op welke hoogte de breedtelijn met een breedte van φ graden getekend moest worden. Noem je die hoogte h, dan moest hij h dus in termen van φ zien uit te drukken.



Figuur 2 Stukje aardbol met bijbehorende kaartrechthoek

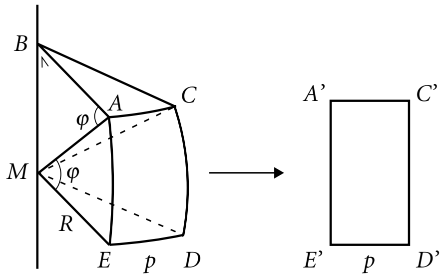
In figuur 2 is een stukje aardbol, begrensd door de evenaar, twee meridianen en een breedtecirkel weergegeven en een suggestie van de rechthoek die dat op de Mercatorkaart gaat worden. Hoe groot de afstand tussen de twee meridianen op de aardbol op de kaart gaat worden is vrij te kiezen. Hier doen we net of die afstand op de kaart gelijk is aan de afstand op de aardbol. Bij de echte kaartconstructie moet er natuurlijk een verkleining worden toegepast.

Om tot een juiste verdeling van de breedtelijnen te komen redeneerde Mercator ongeveer op de volgende manier. Veronderstel dat het stukje aardbol van uitrekbaar materiaal is gemaakt. De onderkant van dat stukje, een deel van de evenaar, wordt onuitgerekt op de kaart afgebeeld. Elk ander stukje breedtecirkel, bijvoorbeeld de bovenkant, wordt in horizontale richting uitgerekt. De horizontale uitrekkingssfactor neemt continu met de breedte toe. De koerslijn wordt nu een rechte lijn op de kaartrechthoek als overal op de kaart dezelfde uitrekking in vertikale richting wordt toegepast als de bijbehorende horizontale uitrekking. We vatten het als volgt samen.

Het stukje aardbol krijgt een continu veranderende uitrekking in horizontale en vertikale richting. De uitrekking in beide richtingen is gelijk, waardoor een recht stukje koers op de aardbol een recht lijnstukje op de kaartrechthoek wordt. De uitrekkingsfactor hangt alleen af van de breedte op kaart.

De volgende stap is deze samenvatting in wiskundige termen te vertalen. Cruciaal daarbij is de vraag hoe de (horizontale) uitrekkingsfactor van de breedte afhangt.

In figuur 3 is figuur 2 nogmaals weergegeven, maar nu zijn voor de optredende grootheden variabelen of constanten gegeven:
- p de lengte van het stukje evenaar (constant)
- R de aardstraal (constant)
- φ de breedte (variabel)



Figuur 3 De optredende grootheden

Uit figuur 3 blijkt dat de horizontale uitrekkingsfactor op breedte φ gelijk is aan $1/\cos(\varphi)$, want in de rechthoekige driehoek *MAB* geldt:

$\cos(\varphi) = AB/MA$ dus $AB = MA\cos(\varphi) = R\cos(\varphi)$

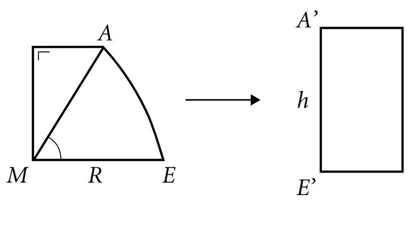
Op de breedte φ worden de lengtematen dus verkleind met de factor $\cos(\varphi)$. Dus is de lengte van het stukje cirkelboog *AC* is gelijk aan

$p\cos(\varphi)$

De cirkelboog *AC* moet dus uitgerekt worden met de factor $1/\cos(\varphi)$.

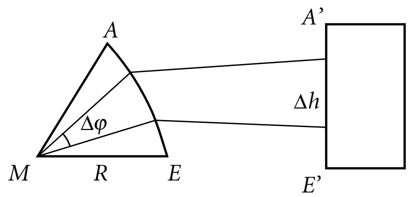
De conclusie is dat de uitrekkingsfactor in horizonale en vertikale richting op de breedte φ bij afbeelden van een stukje aardbol op een kaartrechthoek gelijk is aan $1/\cos(\varphi)$.

Nu komt het laatste probleem. Er moet concreet een kaart gemaakt worden van een stukje aardbol tussen de evenaar en een breedtecirkel. Hoe hangt de hoogte h van de kaartrechthoek af van de breedte φ op de bol? Anders geformulerd: welke functie is h van φ?



Figuur 4 Het probleem wordt teruggebracht tot een lengteberekening

In de tijd dat Mercator dit probleem oploste was de wiskunde nog niet zo ver voortgeschreden dat hij de hiervoor tegenwoordig beschikbare hulpmiddelen kon gebruiken. Hij verdeelde boog *EA* in veel kleine, evenlange boogjes. Daarmee corresponderen een heel stel kleine evengrote breedtehoekjes. Eén zo'n klein hoekje geven we de grootte $\Delta\varphi$. De lengte van één zo'n boogje is dan $R\Delta\varphi$. Mercator nam voor $\Delta\varphi$ een kwart graad. Verder nam hij aan dat op zo'n klein stukje boog de vertikale uitrekkingsfactor zo weinig verandert, dat hij die constant kon nemen, bijvoorbeeld gelijk aan de uitrekkingsfactor van de onderkant van het boogje: $1/\cos(\varphi)$. In de kaartrechthoek correspondeert hiermee een lengte Δh tussen de beide begrenzende breedtelijnen, die gelijk is aan $R\Delta\varphi/\cos(\varphi)$. Zie figuur 5.



Figuur 5 Van boog naar kaarthoogte

De hoogte $E'A'$ is dus gelijk aan de som van al die kleine afzonderlijke bijdragen Δh waarvoor geldt:

$\Delta h = R\Delta\varphi/\cos(\varphi)$

zodat voor de hoogte h geldt:

$$h = \frac{R\Delta\varphi}{\cos(\varphi_1)} + \frac{R\Delta\varphi}{\cos(\varphi_2)} + \ldots + \frac{R\Delta\varphi}{\cos(\varphi_n)} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{R\Delta\varphi}{\cos(\varphi_i)}$$

Mercator voerde deze optelling met de hand uit.

Hoe lossen we dat nu op?

Ongeveer 100 jaar later werd door Leibniz (1646-1716) en Newton (1643-1727) afzonderlijk de differentiaal- en integraalrekening ontwikkeld. Zij ontwikkelden methoden om te berekenen tot welke limietwaarde zo'n som nadert als $\Delta\varphi$ steeds kleiner genomen wordt en het aantal termen van de som steeds groter. Die limietwaarde heet een integraal, en de van Leibniz afkomstige notatie, waarin de afkomst van de integraal van een som herkenbaar is, ervoor is:

$$\int \frac{Rd\varphi}{\cos(\varphi)}$$

Voor het geval van het aardbolstukje tussen de evenaar, $\varphi = 0$, en de breedtecirkel α, wordt dit de bepaalde integraal:

$$\int_0^{\alpha} \frac{Rd\varphi}{\cos(\varphi)}$$

Met behulp van de techniek van de integraalrekening (of een computeralgebra) kan men laten zien dat deze integraal gelijk is aan:

$$R\ln\sqrt{\frac{1+\sin(\alpha)}{1-\sin(\alpha)}}$$

De waarde voor $\alpha = 30°$ ($\pi/6$ radialen) is bij benadering gelijk aan $0.55R$, terwijl de lengte van boog EA gelijk is aan $0.52R$. De vertikale uitrekking over dit gehele stuk is dus 0.55/0.52, dat is (afgerond) 1.05. Zouden we van 0 tot p/3 zijn gegaan dan is de lengte op de aardbol $\pi R/3 \approx 1.05R$. Voor de lengte op de kaart vinden we dan $1.32R$, zodat de uitrekking over het geheel gelijk is aan $1.32/1.05 \approx 1.25$.

Door de ontwikkelde projectiemethode met kromme projectielijnen is een hoektrouwe of conforme projectiemethode ontstaan: hoeken op de aardbol en op de kaart zijn gelijk, zodat een koers die een vaste hoek met het noorden maakt als een rechte lijn op de kaart wordt weergegeven. Vermeld is al dat de rechte hoek tussen breedtecirkels en meridianen bij een cilinderprojectie bewaard blijft. Deze projectie staat bekend als de *Mercator-projectie.* Omdat de uitrekking in vertikale richting groter wordt naarmate de breedte groter is, staat deze cilinderprojectie ook bekend onder de naam: de *cilinderprojectie met de wassende breedten.*

Enige beschouwingen naar aanleiding van de Mercator-projectie

In de hier aan de hand van het probleem van Mercator beschreven methode zijn de volgende stappen te onderscheiden. Deze stappen zullen bij het aanpakken van problemen met behulp van wiskunde op de een of andere manier voorkomen.

Stap 1
Leent het probleem zich voor een wiskundige aanpak? Zo ja, hoe zal globaal een plan van aanpak eruit zien? Wat is gegeven? Wat is gevraagd?
Op grond van wat we weten en op grond van onze ervaring, vermoeden we dan dat het probleem zich leent voor een aanpak en oplossing met wiskundige hulpmiddelen?

Stap 2
Wat zijn de relevante grootheden? Geef die weer met variabelen en constanten.
Vervolgens is geanalyseerd wat precies relevant is in de gegeven situatie. Van allerlei niet- of minder relevante zaken is afgezien. Ook zijn ter vereenvoudiging bepaalde zaken mooier voorgesteld dan ze wellicht in werkelijkheid zijn. Zo is aangenomen dat de wereld een perfecte bol is. Er heeft een zekere *abstractie* plaats gevonden.

Stap 3
Wat zijn de verbanden tussen de variabelen en de constanten?
In deze stap wordt vastgesteld wat de verbanden tussen de variabelen en de constanten zijn. Die verbanden worden als functies vastgelegd door middel van formules. In het geval van de Mercator-projectie: de breedte, de horizontale uitrekkingsfactor, de straal van de aarde en de hoogte. Voor die grootheden worden variabelen en constanten ingevoerd.
De variabelen en de vergelijkingen die de verbanden tussen de variabelen vastleggen heten samen het *wiskundige model.*
Bij de Mercator-projectie is zo'n verband dat de horizontale uitrekkingsfactor op een bepaalde breedte het omgekeerde van de cosinus van die breedte is. Of dit tot oplossing van het oorspronkelijke probleem zal leiden – hoe hangt h van φ af? – is nog niet duidelijk. In deze stap zit dus een spannend moment. Het construeren van het wiskundig model moet namelijk zo gebeuren dat de hierna te geven stap inderdaad kan worden uitgevoerd. Het is dus niet zeker dat het werkt. Ervaring speelt hier, zo denk ik, een rol.

Stap 4
Met wiskundige technieken wordt het probleem opgelost.
Gegeven het wiskundige model wordt nu met aan bepaalde onderdelen van de wiskunde ontleende technieken het probleem opgelost.
Bij de Mercator-projectie is dat nu de integraal- en differentiaalrekening. In zijn tijd gebeurde het numeriek (met hoofd en hand).

Stap 5
Kijk terug op het het resultaat en de wijze waarop dat tot stand is gekomen.
Ten slotte moet nagegaan worden of het resultaat ook inderdaad het (of een zo goed mogelijk) antwoord op het gestelde probleem is, en of het antwoord in overeenstemming is met wat redelijkerwijs te verwachten was. In deze fase is het ook goed te beseffen wat de cruciale stap in het oplosproces was. Want een dergelijke stap kan wellicht bij andere problemen, misschien in aangepaste vorm, ook een belangrijke stap zijn. Aldus kan inderdaad ervaring bij een volgend probleem te gelde worden gemaakt.
Bij Mercator was die cruciale stap het idee dat, om de hoek constant te houden, de uitrekking in vertikale richting gelijk genomen moet worden aan die in de

▼ Lees verder op pag. 180.

Schoolonderzoek

Syllabus
Begin 1996 wordt aan alle scholen de syllabus wiskunde toegestuurd, uitgebracht door de CEVO[1] in samenwerking met het Cito. Deze syllabus bevat toelichtingen op de manier waarop vaardigheden en eindtermen uit het nieuwe eindexamenprogramma wiskunde voor vbo en mavo, c- en d-niveau, op het centraal examen worden geëxamineerd. Maar u vindt er ook toelichtingen in op afname en correctie van het examen en op de manier waarop het examen wordt samengesteld. Verder staan er opmerkingen in over taal- en notatiegebruik en over de verschillen tussen c- en d-niveau. Als voorbeeld worden onder andere de examens van 1995 opgenomen. Een belangrijk document dus voor alle wiskundedocenten die in 1997 voor de eerste maal met het nieuwe examen wiskunde voor vbo en mavo te maken krijgen.

Voor docenten die meer informatie willen over het nieuwe programma, of die de beschikking willen hebben over de examenbundels waarin de experimentele examens van de afgelopen jaren zijn verzameld, is aan het eind van dit artikel een lijst met publicaties opgenomen.

En vbo-a en -b dan?
Het a- en b-niveau van het vbo kennen geen centraal examen onder verantwoordelijkheid van de CEVO. In feite kan iedere school deze niveaus op zijn eigen manier afsluiten. Voordeel daarvan is dat de school de afsluitende toetsen kan aanpassen aan hetgeen in de lessen behandeld is. Nadeel is dat diploma's van verschillende scholen daardoor niet vergelijkbaar zijn en dat aan leerlingen van verschillende scholen verschillende eisen worden gesteld. Veel scholen gebruiken daarom het schoolexamen zoals dat door de SABO[2], inmiddels na fusie VVO[3], wordt gemaakt.

Door het APS is, in samenwerking met docenten en anderen die betrokken waren bij het ontwikkelen van een programma voor 12 - 16-jarigen, een nieuw examenprogramma gemaakt voor vbo-b. Dit nieuwe programma voor vbo-b houdt rekening met de eindtermen uit de basisvorming en sluit zo goed mogelijk aan bij het examenprogramma voor vbo/mavo c/d.
Het examenprogramma is door de landelijke examencommissie voor vbo-b (LEC) vastgesteld.

Voor a-niveau is geen apart examenprogramma gemaakt. Inhoud van de lessen en examinering kunnen voor dit niveau immers worden aangepast aan de mogelijkheden van individuele leerlingen. Het Freudenthal instituut heeft de afgelopen jaren gezorgd voor experimentele examens voor vbo-b[4] die passen bij dit examenprogramma, uiteraard in nauwe samenwerking met de docenten van de scholen die al volgens dit programma werken. Ook in 1996 zal er nog zo'n experimenteel examen verschijnen. Vanaf 1997 zal deze taak door de constructiegroep van de VVO moeten worden overgenomen. Ook de examens voor vbo-b zijn opgenomen in examenbundels. Zie voor een overzicht het eind van dit artikel.

Schoolonderzoek
Voor het schoolonderzoek is de syllabus, die aan het begin van dit artikel genoemd werd, ook een nuttig hulpmiddel. Vooral omdat de verschillende eindtermen uitgebreid zijn toegelicht. In de syllabus zijn echter geen toelichtingen opgeno-

Inhoud

men bij de vorm en inhoud van het schoolonderzoek. De CEVO is daar immers niet verantwoordelijk voor. Toch moet er ook in het schoolonderzoek veel veranderen, schoolonderzoeken moeten immers passen bij het onderwijs dat eraan vooraf gegaan is. In het schoolonderzoek zijn er meer toetsmogelijkheden dan in het centraal examen. Het is belangrijk dat docenten ook van die mogelijkheden gebruik maken.

In het examenprogramma is over de inrichting van het schoolonderzoek het volgende opgenomen:

'*Het schoolonderzoek heeft betrekking op de gehele examenstof. Het schoolonderzoek wordt zo ingericht dat:*
- *in elk geval ten minste één opgave of opdracht betrekking heeft op het functioneel gebruik van de computer (vaardigheid 5);*
- *zo mogelijk ten minste één opgave of opdracht in het bijzonder betrekking heeft op geïntegreerde wiskundige activiteiten (vaardigheid 7);*
- *zo mogelijk naast de traditionele schriftelijke en mondelinge toetsvormen ten minste één opgave of opdracht betrekking heeft op een of meer andere vormen van toetsing, bijvoorbeeld werkstukken, projecten (daaraan kan door meer kandidaten worden gewerkt, mits daarbij individuele beoordeling mogelijk is);*
- *de vragen en opdrachten zoveel mogelijk worden gepresenteerd in een herkenbare en inleefbare context; binnen deze context worden open vragen gesteld in combinatie met vragen die een eenduidig antwoord vereisen;*
- *de aard van de gekozen contexten zoveel mogelijk wordt afgestemd op de specifieke opleiding die de kandidaat volgt of op andere situaties uit de leefwereld van de kandidaat.*'

De COW[5], die het voorstel voor het examenprogramma destijds opstelde, gaf hierbij de volgende toelichting: Het is belangrijk om bij het schoolonderzoek (vooral ook die) vaardigheden te toetsen die niet in het centraal examen aan de orde kunnen komen en om daarbij gebruik te maken van een breed scala aan toetsmogelijkheden.
Bij het schoolonderzoek dient ervoor gezorgd te worden dat dat de individuele kwaliteiten en aanleg van kandidaten goed tot hun recht komen. In het bijzonder moet daarbij gedacht worden aan typische verschillen tussen jongens en meisjes en aan de specifieke problemen van kandidaten met een niet-Nederlandse achtergrond of met lees- en schrijfproblemen.
Een voorbeeld van een andere manier van toetsen in het schoolonderzoek is een mondelinge toetsing naar aanleiding van een project dat individueel of groepsgewijs werd uitgevoerd. Ook kan aan een mondelinge of schriftelijke toetsing gedacht worden waarbij de computer als hulpmiddel gebruikt wordt. Het verwerken en analyseren van grote hoeveelheden statistisch materiaal bijvoorbeeld, is alleen goed mogelijk wanneer daarbij de computer wordt gebruikt. Geïntegreerde wiskundige activiteiten dienen een belangrijke plaats te krijgen in de toetsen van het schoolonderzoek. Daarbij kunnen allerlei materialen gebruikt worden, bijvoorbeeld voor het bouwen van ruimtelijke modellen, het uitvoeren van metingen, enzovoort.

Vooral voor het vbo is het belangrijk dat bij het schoolonderzoek de aard van de gebruikte contexten voor een deel op de beroepsrichting wordt afgestemd; bij het centraal examen kan dat alleen in meer algemene zin gebeuren.

Op dezelfde manier als dat bij het centraal examen gebeurt moet bij het schoolonderzoek rekening worden gehouden met de verschillen tussen c- en d-niveau, zoals die beschreven zijn in het examenprogramma.

Voorbereiding op het schoolonderzoek

Samenwerken en toepassen van wat geleerd is kwam in de basisvorming al uitgebreid aan de orde. Als het goed is hebben leerlingen dan ook al in de onderbouw van vbo en mavo kennis gemaakt met opdrachten waarbij die aspecten aan de orde komen. Ook hebben ze waarschijnlijk al gewerkt met een aantal computerprogramma's, met name voor het tekenen van allerlei grafieken en voor het verwerken van statistische gegevens.
Toch is het belangrijk om in klas drie van vbo en mavo expliciet aandacht te besteden aan opdrachten die in het jaar daarna als onderdeel van het schoolonderzoek kunnen worden gegeven. Zelfstandig een onderzoekje uitvoeren kun je immers niet zomaar, dat moet je geleerd hebben. En voor de docenten is het nuttig zelf alvast ervaring op te doen met het laten uitvoeren en corrigeren van open opdrachten. Zodat dat niet in het examenjaar voor het eerst hoeft te gebeuren.
Ook over dit onderwerp zijn ervaringen van proefscholen gebundeld.

Truus Dekker[*]

Noten

1 CEVO centrale examencommissie vaststelling opgaven
2 SABO samenwerkingsverband voor algemeen voortgezet- en beroepsonderwijs
3 VVO vereniging voor voortgezet onderwijs
4 Voorbeelden van opgaven uit een experimenteel examen voor vbo-b vindt u in de werkbladen op de bladzijden 170 en 171
5 COW commissie ontwikkeling wiskundeonderwijs

* De auteur is verbonden aan het Freudenthal instituut

Eindelijk: de Grafische Rekenmachine!

Dit artikel is een reactie op het artikel 'Bezwaren tegen de invoering van de grafische rekenmachine' in Euclides 71-3.

Naar aanleiding van het artikel 'Bezwaren tegen de invoering van de grafische rekenmachine' van de heer C.J. van de Giessen in Euclides 71-3 reageren wij met een bijdrage over het nut van de grafische rekenmachine. In het artikel werd wel een heel negatief beeld geschetst van de grafische rekenmachine. Wij vinden dat de bezwaren zoals die door de heer Van de Giessen zijn aangevoerd, onjuist zijn en dat er ook andere visies bestaan.
Dit jaar studeren we beiden af aan de Rijksuniversiteit Groningen op een opdracht betreffende het gebruik van de grafische rekenmachine (GRM) in het voortgezet onderwijs. In september 1995 is een experiment gestart in 12 klassen aan zeven verschillende scholen, waarbij acht klassen met de grafische rekenmachine werken. In deze klassen worden interviews en toetsen afgenomen en lesobservaties uitgevoerd. Onze taak is de oplossingsmethoden van leerlingen in klassen met GRM en zonder GRM te vergelijken.

GRM versus computer?

In het artikel worden de GRM en de computer voortdurend met elkaar vergeleken. De heer Van de Giessen ziet ze als twee concurrerende apparaten terwijl de GRM gezien moet worden als een logische stap in het gebruik van de wiskundige hulpmiddelen. De computer en de GRM worden ook niet voor hetzelfde doel ingezet. Bij de GRM zal de nadruk veel meer liggen op het plotten van grafieken en op de oriëntatie op functies. De GRM is dus een hulpmiddel binnen de les. De computer wordt klassikaal gebruikt voor grotere problemen. Het zal niet voorkomen dat een leerling even de computer gebruikt om te kijken hoe de grafiek van een functie eruit ziet. Daarnaast geeft GRM ook als voordeel dat hij mee naar huis genomen kan worden. De computer zal steeds meer gebruikt worden in de wiskundeles, maar het is nu nog niet mogelijk om voor iedere leerling een computer beschikbaar te hebben. Wij verwachten dat dit de komende tien jaar ook zeker niet het geval zal zijn.

Bedieningsgemak

Het leren bedienen van de GRM blijkt zeer snel te gaan, leerlingen kunnen na één les 'stoeien' met het apparaat al voldoende overweg met de basisvaardigheden die nodig zijn voor een goede bediening van de grafische mogelijkheden. Het blijkt dat de leraren hier meestal meer problemen mee hebben. De problemen die geschetst worden in het artikel, blijken, eenmaal in de klas besproken, geen probleem te zijn. Als je de eerste keer tegen de interpretatieverschillen en invoerverschillen aanloopt, lijkt het vreemd, maar de leerlingen blijken zeer goed in staat deze problemen snel op te lossen. Deze problemen stimuleren het juiste gebruik van haakjes en voordat een grafiek geplot wordt, moet er nagedacht zijn over het bereik en domein van de functie. Er wordt enig inzicht verwacht van de gebruiker van de GRM. Het is geen blackbox waarbij je de gegevens intikt, waarna automatisch de juiste grafiek weergegeven wordt.

In het artikel wordt ook het verschil beschreven tussen de twee verschillende mintekens. Dit is volgens de heer Van de Giessen een wiskundig argument tegen de grafische rekenmachine. Het kan echter gezien worden als een didactisch pluspunt. Er wordt nu een duidelijk verschil gemaakt tussen het toestandssymbool en het bewerkingssymbool. Hierdoor wordt een leerling gestimuleerd om een duidelijk onderscheid te maken tussen beide tekens. Ook wordt geschreven dat de basisvaardigheden snel weer verdwenen zijn. Om te zeggen dat de leerling dit moet onderhouden, is wel reëel. Aan het begin van een nieuw schooljaar kent een groot aantal leerlingen ook elementair wiskundige basisvaardigheden niet meer, bijv. de *abc*-formule. Dit moet dan ook weer worden herhaald door de leraar.

Conclusie

Wij zien de komst van de GRM als een positieve ontwikkeling. Er zit een aantal nadelen aan het apparaat, maar deze wegen niet op tegen de voordelen. De leerlingen moeten leren werken met de computer en dus ook met verschillende programma-pakketten. De GRM kan gezien worden als een onderdeel hiervan en de bediening van de GRM is niet zo onlogisch of afwijkend, dat dit grote problemen zal opleveren. De grafische rekenmachine is een handig, wiskundig hulpmiddel dat tijdens de les gebruikt kan worden en het is een logische stap in het gebruik van de technologische, wiskundige hulpmiddelen.

Edwin Oude Engberink
Martin Pieter Traas

De grafische rekenmachine, jammer!

Een reactie op een reactie dient uitermate kort te zijn. Daarom wil ik slechts op een enkel argument ingaan.
De schrijvers stellen dat ik de computer en de grafische rekenmachine als twee concurrerende apparaten zie. Dat is niet juist en een zorgvuldig lezer is dat niet ontgaan. Ik heb ‘concurrerend’(pagina 85) niet voor niets tussen aanhalingstekens geschreven. Juist de Vakontwikkelgroep heeft in haar voorstellen de twee hulpmiddelen in een concurrerend kader geplaatst. Daartegen richt zich mijn hoofdbezwaar, hetgeen ook uit de titel ‘Bezwaren tegen de invoering van de grafische rekenmachine’ moge blijken. Zo’n twintig jaar eerder zou een vergelijkbare VOG hebben voorgesteld dat op het schoolonderzoek een wetenschappelijke rekenmachine gebruikt mag worden, maar dat op het examen de leerling over een rekenliniaal dient te beschikken.
Het argument van de twee schrijvers dat het ‘nu niet mogelijk zou zijn voor iedere leerling een computer te hebben’ gaat niet op. Ten eerste heb ik het over de nabije toekomst. Nu al zijn er pocketcomputers van zo’n 500 gulden op de markt en de ontwikkelingen gaan razendsnel. Ten tweede beschikken ook momenteel al veel leerlingen, thuis of op school, over een computer. Een reden waarom van educatieve en andere software ook leerlinglicenties worden uitgegeven.
Overigens waar een (politieke) wil is, is een weg. Tegen de tijd dat ‘de tweede fase examen doet’ zal naar ik vrees blijken dat het in 1995 aan visie heeft ontbroken.

Carel van de Giessen

IT = GR + PC

In zijn betoog tegen de invoering van de grafische rekenmachine (zie Euclides 71-3) gaat C.J. van de Giessen voorbij aan de belangrijkste troef van dit apparaat: het pocketformaat. Verder beschouwt hij de grafische rekenmachine en de PC als concurrenten, terwijl het veeleer elkaar aanvullende media zijn. De gebruikersvriendelijkheid van de grafische rekenmachine is niet zo abominabel als wordt gesuggereerd. In onderstaande reactie worden deze punten nader uitgewerkt onder het motto: IT = GR + PC.

Aanleiding

‘Weg met de grafische rekenmachine’. Zo eindigt C.J. van de Giessen zijn recente bijdrage in Euclides (zie (1)). Hoewel het toe te juichen is, dat de discussie over de inpassing van de grafische rekenmachine in brede kring wordt gevoerd, vraagt deze vrij ongenuanceerde stellingname om een reactie.
Het genoemde artikel bevat zeker zinnige opmerkingen. De kritiek dat de vakontwikkelgroep wiskunde (onder grote tijdsdruk) onvoldoende heeft nagegaan hoe men bij andere vakken over de grafische rekenmachine denkt, snijdt hout. Gelukkig lijken overigens de ontwikkelaars van natuurkunde positief tegenover de grafische rekenmachine te staan.
De belangrijkste reden om te reageren op zijn artikel, is het feit dat Van de Giessen het voornaamste voordeel van de grafische rekenmachine onbesproken laat: het pocket-formaat. Verder is zijn oordeel over de gebruikersvriendelijkheid van de grafische rekenmachine wel erg hard. En ten slotte is het naar mijn idee niet juist om de grafische rekenmachine als concurrent te zien van de PC. Deze punten zal ik hieronder toelichten. Op andere, minder belangrijke punten, zal ik nu niet ingaan, om deze reactie niet te lang te maken.

De gebruikersvriendelijkheid van de grafische rekenmachine

Allereerst is de grafische rekenmachine een erg mooie ‘gewone’ rekenmachine. Opdracht en antwoord zijn gelijktijdig in beeld, en berekeningen kunnen herhaald of gewijzigd worden. De volgorde waarin uitdrukkingen worden ingevoerd, is heel natuurlijk: eerst √ en dan 2, in plaats van andersom.
De elementaire handelingen bij het werken met functies zijn het invoeren van formules en het maken van tabellen en grafieken. De ervaringen van de (uitgebreide) schoolexperimenten leren, dat de meeste leerlingen, zeker bij wiskunde B, hiermee geen enkele moeite hebben. Op deze punten is de grafische rekenmachine zeker zo eenvoudig te bedienen als een vergelijkbaar computerprogramma.
Natuurlijk, de grafische rekenmachine heeft zijn beperkingen. Zoals ik eerder heb beschreven (zie (2)), kan de matige resolutie van het

beeldschermpje inderdaad aanleiding zijn tot misverstanden. De technologische ontwikkelingen rechtvaardigen overigens de verwachting dat dergelijke problemen in de toekomst een minder grote rol zullen spelen.

Waarom de grafische rekenmachine?
Verschillende van de ons omringende landen (onder andere Engeland, Frankrijk, Scandinavië, zie (3)) blijken het gebruik van een grafische rekenmachine bij het landelijk eindexamen toe te staan. Wat is daarvoor de reden?
Mijn uitgangspunt is dat informatietechnologie iets van deze tijd is, dat een plaats verdient in het wiskundeonderwijs en waarvan het wiskundeonderwijs ook kan profiteren. Dan is de grafische rekenmachine een buitengewoon geschikt medium. Kijk immers naar de praktijk van het PC-gebruik op school: voorlopig vormt de beschikbaarheid van een computerlokaal een behoorlijk hoge drempel. De lokalen dienen gereserveerd te worden en men kan er meestal nauwelijks iets anders doen dan de hele les ‘computeren’. En als dan het gebruik van de PC bij het landelijke eindexamen geen rol speelt, is de verleiding groot om de informatietechnologie links te laten liggen.
De grafische rekenmachine onderscheidt zich van de PC door het banale feit dat het ding in de borstzak past. Geen computerlokaal nodig, geen leerlingen die achter een monitor weggedoken zitten. En wél de permanente beschikbaarheid van de informatietechnologie, en de mogelijkheid die echt in de wiskundeles te integreren: even iets onderzoeken met de machine, dan weer terug naar de theorie. Bovendien kan de machine gebruikt worden bij het eindexamen, wat het risico verkleint dat er in de praktijk niets aan gedaan wordt. Aan de draagbaarheid zit nog een andere kant: het gebruik van de technologie wordt niet altijd door de docent gestuurd. De leerling kan op eigen initiatief en met een eigen strategie het apparaat gebruiken, en hoeft niet op door de docent geplande momenten de uitgestippelde wegen te bewandelen.

GR + PC
Natuurlijk biedt het gebruik van de PC ook voordelen, zoals het grote kleurenbeeldscherm en het grote aanbod van interessante software. Het zou uitermate onverstandig zijn, om alle aandacht op de grafische rekenmachine te concentreren en de PC links te laten liggen. Initiatieven zoals dat van de werkgroep CAVO om een bundel met kant-en-klare Derive-practica (zie (4)) uit te brengen, verdienen aanmoediging. Er is echter geen enkele reden om de twee media als concurrenten te beschouwen. Ze hebben elk hun specifieke voor- en nadelen, en het is zaak om van geval tot geval tot een optimale keuze te komen. Persoonlijk vind ik de (nog prille) ontwikkeling van het gebruik van informatietechnologie binnen het PROFI-project (zie (5)) interessant. In de analysestroom in 5 vwo (nu nog wiskunde B) wordt de grafische rekenmachine op zinvolle wijze gebruikt, in de les en bij het proefwerk. Voor de vlakke meetkunde bestaat behoefte aan een groter scherm en aan het gebruik van kleur; daarvoor is dan ook een specifiek programma voor de PC ontwikkeld, dat bij de toetsing (helaas?) geen rol speelt.

Ten slotte
Wat staat ons in de toekomst nog te wachten op het gebied van informatietechnologie? Elke leerling een notebook, de beeldplaat, multimedia, internet? Mooi allemaal, maar de ervaring leert dat de daadwerkelijke invoering van nieuwe technologie langzamer gaat dan men denkt. Met name zullen notebooks voorlopig toch nog vrij duur en kwetsbaar zijn.
Dat neemt niet weg dat nieuwe mogelijkheden natuurlijk wel onderzocht moeten worden. Het meest acuut zijn in dit verband computeralgebra en interactieve meetkunde. Gelet op de ontwikkeling van een ‘hand-held’ machine zoals de TI-92, die de programma’s Derive en Cabri combineert, is de tijd rijp voor serieuze experimenten op deze gebieden.
Al met al kunnen we de komende, pakweg 15 jaren de grafische rekenmachine goed gebruiken, en is het ‘overslaan’ van dergelijke apparaten geen optie. Voorlopig houd ik het dus op de ‘formule’ IT = GR + PC.

Paul Drijvers

Literatuur

1 *C.J. van de Giessen*: **Bezwaren tegen de invoering van de grafische rekenmachine**. Euclides 71-3, pp. 85-86.
2 *P. Drijvers*: **Neem de grafiek over ...** De Nieuwe Wiskrant 14-4, pp. 29-35.
3 *P. Drijvers*: **De grafische rekenmachine en computer algebra in het buitenland.** De Nieuwe Wiskrant 13-4, pp. 29-34.
4 *Werkgroep CAVO*: **Wiskundelessen met Derive; 15 practica voor de bovenbouw.** Amsterdam: expertisecentrum CAN, 1995.
5 *P. Drijvers en M. Kindt*: **Analyse in profiel.** De Nieuwe Wiskrant 15-2, pp. 4-9.

GR = IT – PC?

In zijn reactie op mijn artikel ‘Bezwaren tegen de invoering van de grafische rekenmachine’ noemt P. Drijvers enkele zaken waarop een reactie niet uit kan blijven.
Het eerste argument van Drijvers is dat het pocketformaat van de GR een voordeel zou zijn. Ik zie dat niet zo. Juist door het kleine formaat kleven aan het apparaat, met name aan het scherm, grote nadelen. Drijvers geeft dat ook toe. Een echt pocketformaat is pas een HD-schijfje, daar past alles op voor thuis en voor op school.
Wat betreft de concurrentie PC versus GR verwijs ik naar mijn repliek op de andere binnengekomen reactie.
Dan de formule die Drijvers als motto aan zijn reactie meegeeft, een noviteit: IT = GR + PC. Dat informatietechnologie (IT) van deze tijd is en een plaats verdient in het (wiskunde)onderwijs ben ik van harte met Drijvers eens. Dat de invulling die hij echter aan IT geeft wel erg gezocht is blijkt uit het volgende.

- De Vakontwikkelgroep Informatica heeft uiteraard ook een examenprogramma gemaakt. In dat programma (71 pagina’s) wordt de GR nergens, ook niet zijdelings, genoemd. Trouwens bij geen enkel vak wordt in de voorgestelde examenprogramma’s, behalve dan in dat van wiskunde,iets gezegd over de GR. Wel over IT en de computer.
- In de ‘Conceptbeschrijving leergebied informatica bovenbouw havo/vwo op leerplanniveau’ (Hartsuijker e.a. SLO) wordt nergens gerefereerd aan de GR, terwijl een uitstekend beeld wordt geschetst van wat IT in het onderwijs zou kunnen inhouden.

Ik zie dan ook niet goed wat de GR met IT uitstaande zou hebben, en vind het oneigenlijk om de GR met IT mee te laten liften.
Neen dan zie ik meer wiskundige IT in een initiatief als dat van de werkgroep CAVO, ‘uit het veld voor het veld’. Maar dat doet Drijvers gelukkig ook.

Carel van de Giessen

Werkgroep MTO

Bij het ter perse gaan van dit nummer zijn er m.b.t. het project ‘Nieuw Leerplan Wiskunde voor het MTO’ een aantal (positieve) ontwikkelingen in gang.
Gezien het prille stadium daarvan willen we u daarover in dit nummer nog niet berichten, maar in het eerst volgende nummer zullen we u over concrete zaken informeren.

Denkt u overigens aan de regionale studiedagen medio maart? De werkgroep houdt dan weer workshops onder de titel ‘Een nieuwe leerling, een nieuw leerplan’.

Namens het Platform,
Jelle Kat

Mededeling

Handleiding PLOT
De op de jaarvergadering aangekondigde handleiding bij het computerprogramma PLOT is verschenen.
Deze is op verzoek van het bestuur van de NVvW door medewerkers van de TU Delft geschreven voor leerlingen van de bovenbouw van havo/vwo; deels is ze ook geschikt voor lagere klassen. PLOT is een Engelstalig menugestuurd grafiekentekenprogramma waarmee ook bepaalde berekeningen uitgevoerd kunnen worden;
zie voor een beschrijving Euclides jg 69 nr 1, blz. 4-9. Zowel het programma als de handleiding mogen gekopieerd worden.

Wie de handleiding niet al tijdens de jaarvergadering besteld heeft, kan dit alsnog doen bij:

mevr. C.A. van Baar
Faculteit TWI
Mekelweg 4, 2628 CD Delft
tel.: 015-2787221
fax: 015-2787245
e-mail: tini@twi.tudelft.nl.

De prijs is *ƒ* 8,50 (incl. porto). Een diskette met het programma kan meegestuurd worden; de prijs is dan *ƒ* 2,50 hoger. PLOT is ook te verkrijgen via:
SLO-lijn 053-4341634
file-naam: GEOMPLOT.ZIP

Ook op de regionale voorjaarsbijeenkomsten 1996 van de NVvW zullen de handleiding en het programma verkrijgbaar zijn.

Boekbespreking

P. Drijvers
Introductie Derive 3.0
Stam Techniek ISBN 90 401 06401
Voor het HBO

De vraag **of** computeralgebra ook in het wiskundeonderwijs thuishoort, is niet meer echt aan de orde. Veel actueler is de vraag waar en in welk soort onderwijs computeralgebra op een zinvolle manier kan worden geïntroduceerd. De doorbraak van het gebruik van deze software in het onderwijs laat langer op zich wachten dan menigeen een aantal jaren geleden vermoedde. Inpassing in het wiskundeonderwijs brengt dan ook veel veranderingen van dat onderwijs met zich mee. Volgens het hier besproken boekje heeft dit vooral te maken met de aard van deze software die de kern van veel wiskundeonderwijs direct raakt, namelijk het symbolische rekenwerk.

In het hoger beroepsonderwijs en dan met name in het hoger technisch onderwijs heeft wiskunde een weliswaar belangrijke, doch ondersteunende functie. Om die reden kan computeralgebra juist in het hoger technisch onderwijs een hoop rekenwerk overnemen. Hulpmiddelen om die introductie zo soepel mogelijk te laten verlopen zijn dan ook noodzakelijk en dus welkom. Het boekje 'Introductie Derive 3.0' is zo'n hulpmiddel.

Het boekje bestaat uit twee delen. Het eerste deel bestaat uit vijf hoofdstukken (practica). Na een start met een eenvoudig introductie-practicum, komen vervolgens onderwerpen als grafieken tekenen, formulemanipulatie, het rekenen met vectoren en matrices, complexe getallen, Taylorreeksen, differentiaalvergelijkingen en Fourier- en Laplacetransformaties aan de orde. Dit zijn zeker voldoende onderwerpen die voor een technische HBO-opleiding relevant zijn. De praktische handleidingen zijn helder en meestal direct toepasbaar geschreven. Niet voor alle opdrachten geldt dat een student direct de ervaring zal hebben dat deze een hoop gewonnen heeft met dit pakket. Zo bewijst het practicum dat geschreven is onder het kopje 'functieonderzoek' direct zijn nut aan de student. Hier wordt namelijk begonnen met de grafiek en kijkend naar dat plaatje wordt verder geredeneerd over de andere wetenswaardigheden van de functie die dan vervolgens met behulp van Derive snel te berekenen zijn. Maar wat te denken van de opdracht om een samengestelde expressie middels een boomstructuur op te splitsen in deelexpressies. En dit dan alleen om later snel via pijltjes het gezochte stuk uit de expressie te kunnen halen. Hier is, wat de student betreft, de methode van trial en error beter op zijn plaats.

Het tweede deel is een documentatiedeel met beknopte programma-informatie. Hierin is onder andere een overzicht van de speciale toetsen opgenomen. Dat mag natuurlijk niet ontbreken en is dan ook heel zinvol.

Over het algemeen is het boekje helder van opzet en meteen te gebruiken. Een enkele keer zul je als gebruiker in het begin al behoefte hebben aan commando's die pas verderop worden behandeld. Het boekje is bij Derive 3.0 goed te gebruiken, maar (zoals gebruikelijk in de automatisering) is dat meteen een nadeel voor wie een andere (oudere) versie van Derive of straks een nieuwere heeft.

De vraag: 'waar in de opleiding moet computeralgebra geïntroduceerd worden ?' kan met dit boekje in de hand worden beantwoord. Namelijk daar waar de wiskunde-onderwerpen, waarbij Derive gebruikt kan worden, aan de orde komen. Want ook voor Derive geldt: het is ter ondersteuning.

Gerdien Visser

Aangeboden

Een aantal jaargangen van wiskundige tijdschriften, die wellicht interessant zijn voor lezers van Euclides:

Christiaan Huygens
jaargang 1921/1922 t/m 1939/1940
(ingebonden)

Euclides
jaargang 1963/1964 t/m 1994/1995
(niet ingebonden)

Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde
jaargang 1958/1959 en 1959/1960
(niet ingebonden)
jaargang 1962/1963 t/m 1972/1973
(niet ingebonden)

Contactadres:
H. Ekstijn
Mathenesserlaan 368[B]
3023 HB Rotterdam
tel. 010-4765926

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt $3 \times 54 = 162$ regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier $2 \times 54 = 108$ regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast.
Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 10 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 7 weken.

Adressen van auteurs

G. Bakker
Cito
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

T. Dekker
Grote Molensteeg 1
1135 XL Edam

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

E. Oude Engberink
M.P. Traas
Padangstraat 11
9715 CK Groningen

J.C. Perrenet
R.L. Fac. Alg. Wetensch.
Postbus 616
6200 MD Maastricht

S.H. Schaafsma
Betuwepad 25
5691 LM Son

H.N. Schuring
Cito
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

Y. Schuringa
Novapad 4
5632 AE Eindhoven

G. Zwaneveld
Bieslanderweg 18
6213 AJ Maastricht

Kalender

5 maart 1996
Rotterdam

Regiobijeenkomst NVvW

7 maart 1996
Zwolle

Regiobijeenkomst NVvW

12 maart 1996
Amsterdam

Regiobijeenkomst NVvW

14 maart 1996
Eindhoven

Regiobijeenkomst NVvW

20 maart 1996
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

22 maart 1996
op de scholen

eerste ronde Wiskunde Olympiade

22 maart 1996
op de scholen

Kangoeroe-wedstrijd

3 april 1996
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

De Mathematische Modelleercompetitie Maastricht

Jacob Perrenet

Inleiding

Ook aan de Rijksuniversiteit Limburg kan men exact studeren. Om aan dit feit meer bekendheid te geven werd op zaterdag 13 mei 1995 de eerste Mathematische Modelleercompetitie Maastricht gehouden. De wedstrijd werd georganiseerd door de vakgroep Kwantitatieve Economie van de Faculteit der Economische Wetenschappen en de vakgroepen Wiskunde en Informatica van de Faculteit der Algemene Wetenschappen. Gedurende twee-en-een-half uur bogen 41 jongens en 9 meisjes (23 vijfdeklassers en 27 zesdeklassers) zich in groepjes over vijf opgaven. Tien deelnemende groepjes waren afkomstig uit België, twee uit Nederland. Zowel de deelnemende leerlingen als de begeleidende docenten waren enthousiast en de organisatoren willen er dan ook een regelmatig terugkerende gebeurtenis van maken. Winnaar werd het Lorentz-Lyceum uit Eindhoven. De opgaven hadden een toegepast karakter en waren voor het merendeel afkomstig uit het domein van de beide exacte opleidingen van de Rijksuniversiteit Limburg: Econometrie en Kennistechnologie. We geven hieronder eerst de vijf opgaven; daarna bespreken we globaal de oplossingen die werden geproduceerd.

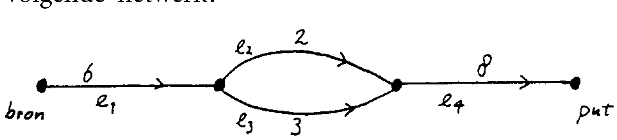
De opgaven

OPGAVE 1: MEDISCH TESTEN
Beschrijving
Een arts krijgt een patiënt op bezoek met gewrichtsklachten. Al spoedig komt de arts tot de conclusie dat er sprake moet zijn van één uit een viertal mogelijke aandoeningen, die we voor het gemak aanduiden met A,B,C en D. Ieder van deze aandoeningen is even waarschijnlijk (dus heeft een kans 25%). De arts heeft drie testen tot zijn beschikking om te achterhalen welke aandoening deze patiënt heeft.

- Test 1: Een positieve uitslag van deze test geeft aan dat de patiënt aandoening A heeft, bij een negatieve uitslag is het B,C of D. De kosten van deze test zijn *ƒ* 300,–.
- Test 2: Bij een positieve uitslag van deze test weet de arts dat de patiënt aandoening D heeft, bij een negatieve uitslag is het A,B of C. De kosten van deze test zijn *ƒ* 400,–.
- Test 3: Bij een positieve uitslag van deze test weet de arts dat de patiënt aandoening A of B heeft, bij een negatieve uitslag is het C of D. De kosten van deze test zijn *ƒ* 500,–.

Door één of meerdere van de drie testen uit te voeren kan de arts altijd achterhalen welke aandoening de patiënt heeft. Hij kan bijvoorbeeld eerst test 3 uitvoeren, en daarna test 1 of 2, afhankelijk van de uitslag van test 3. Er zijn echter meerdere testvolgordes die zekerheid geven over de aandoening van de patiënt.
Vragen
a Welke testvolgorde brengt de laagste verwachte kosten met zich mee, met andere woorden, welke testvolgorde is gemiddeld het goedkoopst?
b Hoe groot zijn de bijbehorende kosten?

OPGAVE 2: EEN NETWERKPROBLEEM
Beschrijving
Nederland wordt doorkruist door een dicht netwerk van spoorwegen. 's Nachts wordt dat netwerk vooral gebruikt voor goederenvervoer. We willen graag het maximale aantal treinen weten dat in één nacht van Groningen naar Maastricht, of van Rotterdam naar de Duitse grens kan rijden. Dat aantal hangt in belangrijke mate af van 'bottlenecks' van het spoorwegnet. Als eenvoudig voorbeeld van dit probleem bekijken we het volgende 'netwerk'.



Figuur 1 Eenvoudig netwerk bij opgave 2

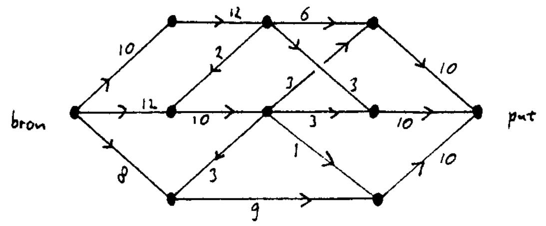
Dit netwerk bevat een *bron*, een *put*, tussenstations en verbindingen die in de aangegeven richting gebruikt kunnen worden. De bijbehorende getallen geven de maximale capaciteiten (per tijdseenheid) van de verbindingen weer. Een *stroom* in zo'n netwerk is een rij niet-negatieve getallen, één voor elke verbinding, die aangeven hoeveel er (per tijdseenheid) door de verbindingen stroomt. We veronderstellen dat wat er totaal

uit de bron stroomt gelijk is aan wat er totaal bij de put naar binnen gaat, en dat er bij ieder tussenstation evenveel naar binnen stroomt als er uit stroomt. Het is eenvoudig in te zien dat er bij de maximale stroom in dit netwerk 5 door e_1 en e_4 stroomt, 2 door e_2 en 3 door e_3. De verbindingen e_2 en e_3 vormen immers samen een ‘bottleneck’ van totale capaciteit 5 waar alles doorheen moet wat van bron naar put gaat.

Vragen

a Bekijk onderstaand netwerk. Bepaal in dit netwerk een maximale stroom. Beschrijf, indien mogelijk, de methode die je daarbij gevolgd hebt.

b Hoe kun je laten zien dat de gevonden stroom inderdaad maximaal is?



Figuur 2 Netwerk bij vraag 2a en 2b

OPGAVE 3: VERWISSELBARE WIJZERSTANDEN

Beschrijving

Terwijl de tijd verstrijkt nemen de wijzers van een klok bepaalde standen in. Niet alle standen zijn mogelijk; denk bijvoorbeeld aan de grote wijzer op 6 en de kleine op 12. Sommige standen zijn verwisselbaar, in die zin dat verwisseling van de wijzers weer een mogelijke wijzerstand oplevert.

Vraag

Hoeveel verschillende verwisselbare wijzerstanden zijn er?

OPGAVE 4: EEN LOKATIEPROBLEEM

Beschrijving

De Nederlandse plaats Wildervank is een typisch voorbeeld van lintbebouwing. Zij is enkele meters breed maar daarentegen enkele kilometers lang. Men wil in deze plaats de mogelijkheden om te ‘skateboarden’ verruimen. Hiertoe heeft men besloten ergens een ‘half-pipe’ te bouwen. Teneinde de precieze lokatie hiervan te bepalen, mogen de vijf ‘skateboard’ verenigingetjes van deze gemeente ieder een voorkeurslokatie opgeven. Iedere vereniging wil de ‘half-pipe’ zo dicht mogelijk bij haar voorkeurslokatie hebben. Er is echter een bijkomend probleem. Het gemeentebestuur, dat uiteindelijk een beslissing neemt op basis van de *opgegeven* voorkeurslokaties, kent de *ware* voorkeurslokaties niet: verenigingen kunnen, om strategische redenen, andere dan hun ware voorkeurslokaties opgeven zonder dat het gemeentebestuur daar achter komt. De procedure om tot een beslissing te komen is vooraf bekend, zodat het mogelijk is dat de verenigingen een andere dan hun ware voorkeurslokatie opgeven, teneinde de uiteindelijke beslissing in hun voordeel te benvloeden.

We geven de gemeente Wildervank weer met het interval [0, 100]. De ware voorkeurslokaties van de vijf verenigingen geven we aan met $l_1,\ldots l_4$ en l_5 (allemaal getallen in het interval [0,100]. Veronderstel dat het gemeentebestuur de volgende procedure hanteert: neem als lokatie voor de “half-pipe” het gemiddelde van de opgegeven voorkeurslokaties.

Stel dat $l_1 = l_2 = 40, l_3 = 50, l_4 = 60$ en $l_5 = 70$.

Vragen

a Wat wordt de beslissing van het gemeentebestuur als iedere vereniging haar ware voorkeurslokatie opgeeft?

b Wat gebeurt er als vereniging 3 niet 50, maar 40 als voorkeurslokatie zou opgeven, terwijl de andere verenigingen hun ware voorkeur opgeven?

c Stel dat de verenigingen 1,2 en 3 gaan overdrijven om voordeel te behalen. In het bijzonder, veronderstel dat verenigingen 1-3 lokatie 0 en verenigingen 4-5 hun ware lokaties opgeven. Is er nu een vereniging die erop vooruitgaat in vergelijking met de ‘eerlijke’ uitkomst?

Vervolg beschrijving

Uit de bovenstaande vragen blijkt dat de procedure ‘neem het gemiddelde’ in zekere zin manipuleerbaar is. Het is niet zo moeilijk een procedure te bedenken die dat niet is, bijvoorbeeld: neem altijd de lokatie 50, ongeacht de opgegeven voorkeurslokaties. Dat is natuurlijk wel een erg grove manier om het manipuleerbaarheidsprobleem op te lossen.

Vervolgvraag

d Bedenk een minder grove procedure die eveneens niet manipuleerbaar is: dat wil zeggen dat een vereniging er nooit voordeel bij heeft een andere dan haar ware voorkeurslokatie op te geven, ongeacht wat die voorkeurslokatie en de voorkeurslokaties van de andere verenigingen zijn.

OPGAVE 5: HET 15-SPEL

Beschrijving

Twee spelers, Annie en Bernard, spelen het zogenaamde 15-spel. Om de beurt kiest iedere speler een getal uit de rij 1,2,...9 (een getal kan slechts één maal worden gekozen). De eerste speler die in zijn verzameling drie getallen heeft die samen 15 zijn, heeft gewonnen.

Het volgende spel is aan de gang: Annie kiest 8, Bernard kiest 2; Annie kiest 4, Bernard kiest 3; Annie kiest 5.

Vragen

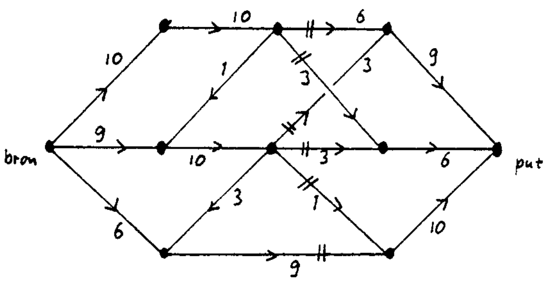
a Wat moet Bernard nu doen?

b Wat heeft dit spel te maken met het bekende spel ‘boter, kaas en eieren’, ook wel ‘kruisje, nulletje’ genaamd? Kun je daaruit iets afleiden over hoe je het spel moet spelen? Bestaat er een winnende strategie?

De uitwerkingen

1: MEDISCH TESTEN
Vier groepjes kwamen door uitschrijven of in schema zetten van alle volgordes tot de juiste oplossing, dat er twee optimale handelswijze zijn. De eerste is de testvolgorde van toenemende kosten (1 en zonodig nog 2 respectievelijk 3). De tweede is eerst test 3 en dan afhankelijk van de uitslag 1 of 2. In beide gevallen zijn de verwachte kosten 850 gulden. In één geval werd een meer bewerkelijke weg gevolgd, waarbij per type aandoening de gemiddelde kosten werden berekend over alle volgordes. Een vijftal groepjes kwamen op een te hoog bedrag uit, doordat ze altijd alle testen wilden laten uitvoeren.

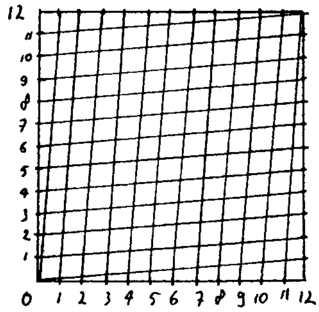
2: EEN NETWERKPROBLEEM
Vrijwel alle groepjes vonden de maximale waarde van de stroom: 25. Er werd daarbij in het algemeen de methode gevolgd van het beginnen met stroom 0 in elke verbinding en vervolgens het herhaald zoeken van paden van bron naar put, waarin de stroom verhoogd kan worden.



Figuur 3 Maximale stroom door bottleneck (//)

Twee groepjes gebruikten de capaciteit van de bottleneck, in de figuur gemarkeerd met dubbele strepen, om aan te tonen dat de gevonden waarde inderdaad de maximale is. Twee groepjes deden slechts een poging in die richting; de rest kwam aan de bewijsvoering in het geheel niet toe.

3: VERWISSELBARE WIJZERSTANDEN
Twee groepjes losten de opgave op met een grafische methode. In een vierkant van 12 bij 12 wordt de stand van de ene wijzer op de horizontale as gezet en die van de andere op de verticale. Dit kan op twee manieren. De verwisselbare wijzerstanden komen overeen met de gemeenschappelijke punten van beide grafieken. Het aantal is 12.12 – 1, immers (0, 0) en (12, 12) horen bij dezelfde stand.



Figuur 4 Grafische oplossing bij opgave 3

Eén groepje probeerde een algebraïsche oplossingswijze, waarbij de stand van de grote wijzer weergegeven werd door $a + b$ met $a \in \{0, \ldots, 11\}$ en $b \in [0, 1)$ en die van de kleine wijzer met $c + d$ met $c \in \{0, \ldots, 11\}$ en $d \in [0, 1)$. Uit de betrekkingen $d = (a + b)/12$ en $b = (c + d)/12$ had het groepje het aantal 143 kunnen vinden, maar slaagde daar niet in. De andere groepjes kwamen zonder veel uitleg slechts tot het aantal 11 (of 13 als gevolg van een rekenfout). Dit is precies het aantal malen dat de stand van de grote wijzer met die van de kleine samenvalt.

4: EEN LOKATIEPROBLEEM
Er waren geen problemen met de drie inleidende vragen. Alle groepjes vonden bij (a) het gemiddelde van 52, bij (b) 50, de ideale lokatie voor vereniging 3, en bij (c) 26, waarbij alle verenigingen erop achteruit gaan vergeleken met de ‘eerlijke’ uitkomst. Twee groepjes kwamen met een juiste oplossing: de mediaan. Twee groepjes kwamen met een procedure, zoals al in de opgavetekst weergegeven, namelijk ‘bouw het ding maar bij de kerk; daar moeten ze toch heen’, een constante oplossing dus, niet manipuleerbaar maar wel grof. Verder was er een antwoord, waarbij de lokatie niet als punt werd opgevat - ‘bouw het ding van de hoogste naar de laagste lokatie’ - en waren er diverse niet-wiskundige antwoorden in de trant van ‘stel een commissie in die de zaak moet oplossen’.

5: HET 15-SPEL
De Vlaamse deelnemers kon nog bijtijds worden verteld, dat ‘boter, kaas en eieren’ hetzelfde is als ‘tic-tac-toe’. Vrijwel ieder groepje vond daarna het antwoord 6 op de eerste vraag. Een vijftal groepjes zag het verband met het magisch vierkant en gaf aan dat het spel niet te winnen is. Dit werd echter veelal gegeven als ervaringsfeit. Er waren nauwelijks pogingen alle mogelijkheden systematisch uit te schrijven. Binnen de beperkte tijd was dat ook ondoenlijk, maar verwacht was wel dat groepjes ontdekt zouden hebben, dat het grote aantal mogelijkheden door te letten op symmetrie enigszins beperkt had kunnen worden.



Figuur 5 Magisch vierkant en boter, kaas en eieren

Werkblad

Koffie

De prijs van een pak koffie van 250 gram is de afgelopen jaren vaak veranderd. In de tabel hieronder zie je op welke datum de prijs werd aangepast.

wijziging in	maandnummer	prijs per 250 g
juli 1988	1	ƒ 2,99
sept 1988	3	ƒ 3,13
jan 1989	7	ƒ 3,28
juli 1989	13	ƒ 3,09
aug 1989	14	ƒ 2,89
okt 1989	17	ƒ 2,69
jan 1990	19	ƒ 2,54
sept 1993	63	ƒ 2,69
jan 1994	67	ƒ 2,84
juni 1994	72	ƒ 2,99
juli 1994	73	ƒ 3,39
aug 1994	74	ƒ 3,99
sept 1994	75	ƒ 4,29

23 In welke periode uit de tabel was de prijs van een pak koffie het laagst?

In januari 1994 werd de oude koffieprijs van ƒ 2,69 met ƒ 0,15 verhoogd.

24 Laat met een berekening zien dat de prijs ongeveer $5\frac{1}{2}$ % hoger werd.

In september 1994 kostte een pak koffie ƒ 4,29. Dat is ƒ 1,60 meer dan de oude prijs van ƒ 2,69 uit september 1993.

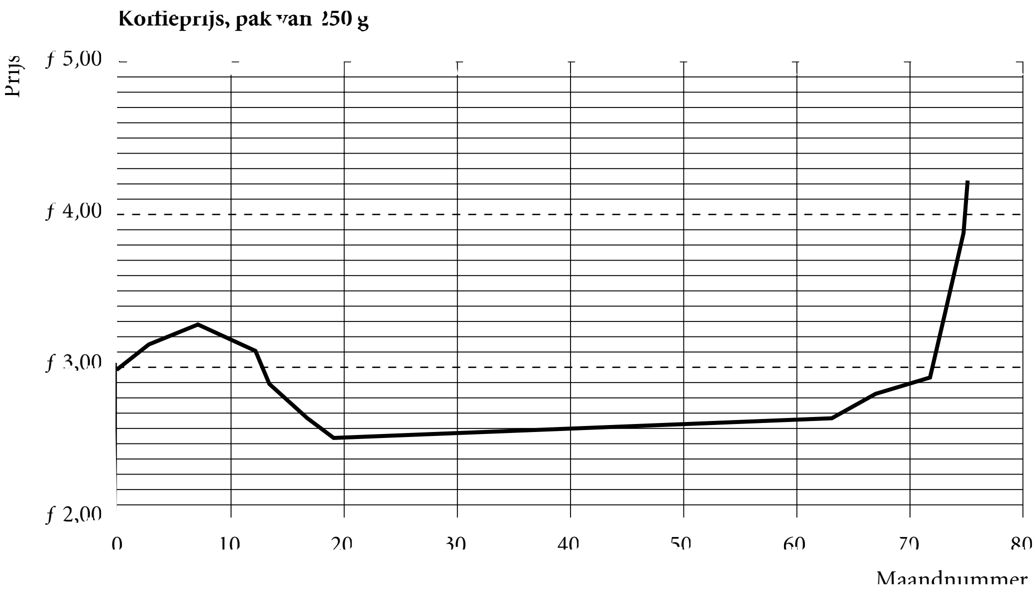
25 Met hoeveel procent is de prijs van een pak koffie gestegen in september 1994 in vergelijking met september 1993?

Uit: Experimenteel examen vbo-B,1995

Werkblad

Natascha

Natascha heeft een grafiek getekend bij de gegevens uit de tabel. Ze heeft de maanden genummerd. Die grafiek staat hieronder.



De grafiek van Natascha heeft bepaalde nadelen. Volgens Natascha was in maand 40 de prijs van een pak koffie tussen ƒ 2,54 en ƒ 2,69. Ze zegt: 'Je weet dus dat de prijs van een pak koffie in maand 40 al ongeveer ƒ 2,60 was.'

26 Ben je het eens met de bewering van Natascha? Leg uit waarom of waarom niet.

Uit: Experimenteel examen vbo-B,1995

De 34e Nederlandse Wiskunde Olympiade 1995

H.N. Schuring

De eerste ronde

De eerste ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1995 is op vrijdag 24 maart gespeeld.
De deelnemers kregen 3 uur de tijd om te proberen een antwoord te vinden op 13 opgaven; 6 in categorie A, waarop 2 punten per opgave gescoord kon worden, 4 in categorie B, voor 3 punten per opgave en 3 in categorie C met 4 punten per opgave. De maximale score bedroeg dan ook 36 punten, wat 8 van de deelnemers hebben behaald.

Het overzicht van de eerste ronde 1995 is gebaseerd op de resultaten van 3037 deelnemers, die de wedstrijdleiders van 264 scholen naar ons opgestuurd hebben. Een verheugende stijging vergeleken met de 2250 leerlingen van 212 scholen in 1994.

De cesuur is gelegd bij score 24, wat zeggen wil dat deelnemers die 24 of meer punten behaalden, worden uitgenodigd voor de tweede ronde.

Van het Lorentz-Lyceum te Eindhoven is de somscore van de beste vijf deelnemers 149. Dit resultaat is het hoogste van het land, zodat deze school de Shell-wisselprijs behaald heeft.

Van de 3037 deelnemers komen er 1394 uit 5 vwo, 119 uit 5 havo, 1019 uit 4 vwo, 205 uit 4 havo en 300 uit een lagere klas.
Van de 105 deelnemers, die uitgenodigd werden voor de tweede ronde, komen er 86 uit 5 vwo, 1 uit 5 havo, 16 uit 4 vwo, 1 uit 4 havo en 1 uit een lagere klas.

Op het resultatenformulier hebben we gevraagd aan te geven hoeveel leerlingen de verschillende opgaven goed gemaakt hebben. Dit is gedaan voor 2820 deelnemers, zodat we een goede indruk van de moeilijkheid van de diverse opgaven gekregen hebben.
Opgave C3 is slechts door 121 leerlingen goed gemaakt en opgave C2 door 164.
Dit waren de moeilijkste opgaven, terwijl de opgaven A1, B1 en A5 het best gemaakt zijn; door respectievelijk 1850, 1058 en 1032 leerlingen goed beantwoord. Achteraf blijkt dat de opgaven B1 en A5 beter vooraan in deze serie opgaven geplaatst hadden kunnen worden. De vraagstukkencommissie krijgt een gedetailleerd overzicht van de resultaten, zodat ze bij het samenstellen van de opgaven voor 1996 hier rekening mee kan houden.

score	frequentie	cumulatieve frequentie
36	8	8
34	3	11
33	1	12
32	8	20
31	1	21
30	7	28
29	12	40
28	9	49
27	8	57
26	8	65
25	19	84
24	21	105
	cesuur	
23	14	119
22	19	138
21	30	168
20	29	197
19	37	234
18	49	283
17	48	331
16	66	397
15	77	474
14	108	582
13	73	655
12	119	774
11	112	886
10	116	1002
9	185	1187
8	116	1303
7	223	1526
6	185	1711
5	184	1895
4	328	2223
3	77	2300
2	453	2753
1	1	2754
0	283	3037

Hieronder volgt het scoringsresultaat van alle opgaven:

opgave	A1	A2	A3	A4	A5	A6	B1	B2	B3	B4	C1	C2	C3
percentage	66	34	30	26	37	18	38	28	13	19	11	6	4

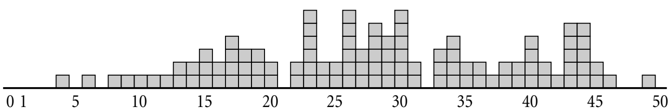
De tweede ronde

Op 15 september 1995 is in Eindhoven de tweede ronde van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gehouden. Van de 105 uitgenodigde leerlingen hebben er 103 deelgenomen. Ze hadden drie uur de tijd om vijf opgaven op te lossen. De maximale score per opgave was 10 punten.

Door bij gelijke eindscore rekening te houden met het behaalde puntenaantal in de eerste ronde, zijn de volgende 10 deelnemers prijswinnaars van de Nederlandse Wiskunde Olympiade 1995:

Prijswinnaars *Nederlandse Wiskunde Olympiade 1995*	**punten 2e ronde**	**punten 1e ronde**
1 Johan Bosman, Renkum	49	32
2 Dion Gijswijt, Almere	46	34
3 Roel Harbers, Magraten	45	29
3 Mark Reinders, Scheemda	45	29
5 Willem Mestrom, Bergen op Zoom	44	36
5 Kees van Schenk Brill, Eindhoven	44	36
7 Erik Postma, Eemnes	44	34
7 Edwin Woudt, Joure	44	34
9 Gerben de Klerk, Middelburg	44	30
10 Wolter Pieters, Ede	43	36

Het onderstaande staafdiagram geeft een overzicht van de scores van alle deelnemers aan de tweede ronde.



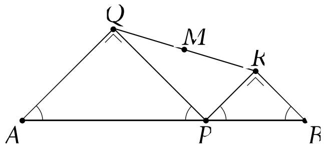
Tenslotte volgen de opgaven en uitwerkingen, verzorgd door de vraagstukkencommissie van de NOCW.

Nederlandse Wiskunde Olympiade

2e ronde, 15 september 1995
Beschikbare tijd: 180 minuten

1 Een kangoeroe springt van roosterpunt naar roosterpunt in het (x, y)-vlak. Zij kan maar twee soorten sprongen maken.
Sprong A: hierbij springt ze 1 naar rechts (in de positieve x-richting) en 3 omhoog (in de positieve y-richting).
Sprong B: hierbij springt ze 2 naar links en 4 naar beneden.
a De startpositie van de kangoeroe is de oorsprong $(0, 0)$. Toon aan dat de kangoeroe naar het punt $(19, 95)$ kan springen en bereken het aantal sprongen dat ze daarvoor nodig heeft.
b De startpositie is nu het punt $(1, 0)$. Toon aan dat ze het punt $(19, 95)$ nooit kan bereiken.
c De startpositie van de kangoeroe is weer de oorsprong $(0, 0)$. Naar welke punten (m, n) met $m, n \geq 0$ kan de kangoeroe springen en naar welke kan zij dat niet?

2 Op een lijnstuk AB wordt een punt P gekozen. Op AP en PB worden gelijkbenige rechthoekige driehoeken (geodriehoeken) AQP en PRB geconstrueerd met Q en R aan dezelfde zijde van AB. M is het midden van QR.
Bepaal de verzameling van de punten M als P het lijnstuk AB doorloopt.



3 Je hebt 101 knikkers, genummerd van 1 tot en met 101. De knikkers zijn verdeeld over twee bakken A en B. De knikker met nummer 40 zit in bak A. Je pakt deze knikker uit bak A en gooit hem in bak B. Hierdoor stijgt de waarde van het gemiddelde van alle nummers in A met $\frac{1}{4}$. Ook de waarde van het gemiddelde van alle nummers in bak B stijgt hierdoor met $\frac{1}{4}$.
Hoeveel knikkers zaten er oorspronkelijk in bak A?

4 Een aantal bollen, allemaal met straal 1, wordt volgens een vierzijdige piramide op elkaar gestapeld. Om te beginnen een vierkant van $n \times n$ bollen als basis, daarop een laag van $(n - 1) \times (n - 1)$ bollen, en zo verder tot en met de bovenste laag die uit 1 bol bestaat.
Wat is de hoogte van deze stapeling?

5 We beschouwen rijtjes $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$ van 13 gehele getallen. Zo'n rijtje heet 'tam' indien voor iedere $i \in \{1, 2, \ldots, 13\}$ geldt: als je ai uit het rijtje weglaat kun je de resterende twaalf getallen verdelen in twee groepjes zodanig dat de som van de getallen in beide groepjes hetzelfde is. Een tam rijtje heet 'turbo tam' als je de resterende twaalf getallen telkens kunt verdelen in twee groepjes van ieder zes getallen met dezelfde som.
a Geef een voorbeeld van een tam rijtje waarvan niet alle getallen gelijk zijn. Laat zien dat dit rijtje inderdaad tam is!
b Bewijs dat ieder tam rijtje geheel uit even òf geheel uit oneven getallen bestaat.
c Bewijs dat in elk turbo tam rijtje alle getallen gelijk zijn.

Nederlandse Wiskunde Olympiade

Oplossingen 2e ronde 1995

1 Bij sprong A is de verplaatsing in de x-richting +1, bij sprong B -2.
Bij sprong A is de verplaatsing in de y-richting +3, bij sprong B -4.
Noem het aantal A-sprongen a en het aantal B-sprongen b, met als voorwaarde dat a en b niet negatief en geheel moeten zijn!

a Van $(0, 0)$ naar $(19, 95)$ moet de verplaatsing in x-richting +19 en in de y-richting +95 zijn.
Dan moet gelden: $a - 2b = 19$ en $3a - 4b = 95$.
Dit levert: $b = 19$ en $a = 57$. Dit is een oplossing omdat beide getallen geheel en niet negatief zijn!
Merk op dat de volgorde waarin gesprongen wordt er niet toe doet, als er maar 57 A-sprongen en 19 B-sprongen gedaan worden dan zit de kangoeroe in $(19, 95)$.

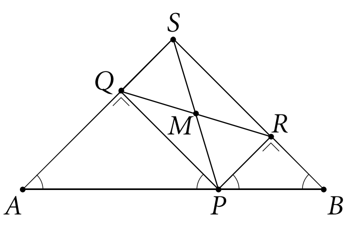
b Van $(0, 0)$ naar $(18, 95)$ krijgen we de vergelijkingen $a - 2b = 18$ en $3a - 4b = 95$ met als oplossing $a = 59$ en $b = 20\frac{1}{2}$, dus geen oplossing in aantallen sprongen!

c Van $(0, 0)$ naar (m, n) geeft de vergelijkingen $a - 2b = m$ en $3a - 4b = n$ met als oplossing

$$a = n - 2m \quad \text{en} \quad b = \frac{n - 3m}{2}.$$

Omdat a en b geheel en niet negatief moeten zijn, zijn alleen punten (m, n) te bereiken met m en n beide even of m en n beide oneven; verder moet gelden $n - 2m \geq 0$ en $n - 3m \geq 0$ dus $n \geq 3m$.
Het zijn de punten:
$(0, 2), (0, 4), (0, 6), \ldots, (1, 3), (1, 5), (1, 7), \ldots, (2, 6), (2, 8), \ldots$

2 Verleng AQ en BR en noem het snijpunt S. S is onafhankelijk van de keuze van P. Nu is vierhoek $RPQS$ altijd een rechthoek met M het midden van QR. Omdat de diagonalen in een rechthoek elkaar midden door delen is M ook het midden van SP. Als P dus het lijnstuk AB doorloopt, dan doorloopt M het lijnstuk dat de middens van AS en BS verbindt (de middenparallel van driehoek ABS).



3 Noem het aantal knikkers in bak A a; in bak B zitten dan 101-a knikkers. Noem de som van getallen op de knikkers in bak A S; de som van de getallen op de knikkers in bak B is dan $101 \cdot 51 - S$ (want $1 + 2 + 3 + \ldots + 101 = 101 \cdot 51$). De gemiddelden in bak A en B zijn respectievelijk

$$\frac{S}{a} \quad \text{en} \quad \frac{101 \times 51 - S}{101 - a}.$$

Na het verplaatsen van balletje 40 van A naar B zijn de gemiddelden:

$$\frac{S - 40}{a - 1} \quad \text{en} \quad \frac{101 \times 51 - S + 40}{101 - a + 1}.$$

Beide gemiddelden zijn met een kwart gegroeid, dus we krijgen de twee volgende vergelijkingen:

$$\frac{S}{a} + \frac{1}{4} = \frac{S - 40}{a - 1} \quad \text{en}$$

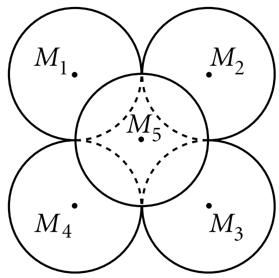
$$\frac{101 \times 51 - S}{101 - a} + \frac{1}{4} = \frac{101 \times 51 - S + 40}{101 - a + 1}.$$

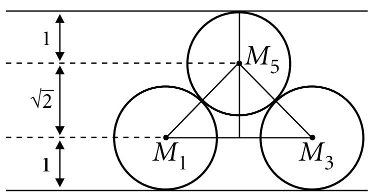
De eerste vergelijking geeft $S = \dfrac{a(a + 159)}{4}$

en de tweede $S = \dfrac{a^2 - 43a + 14746}{4}$.

Uit $a^2 + 159a = a^2 - 43a + 14746$ volgt $202a = 14746$ dus $a = 73$ met $S = 4234$.

4 Beschouw een bovenaanzicht van een stukje van de stapel waarbij 4 bollen in een laag liggen met een bol daar bovenop, zie de linker figuur. Bekijk het vertikale vlak door de middelpunten M_1, M_3 en M_5.
Omdat de bollen elkaar raken is $M_1M_3 = 2\sqrt{2}$ en $M_1M_5 = 2 = M_3M_5$, dus driehoek $M_1M_3M_5$ is rechthoekig gelijkbenig. De hoogte van een stapel van 4 bollen plus 1 bol is dus gelijk aan $1 + \sqrt{2} + 1$.
De hoogte van een stapel van 9 bollen plus 4 plus 1 is dus gelijk aan $1 + 2\sqrt{2} + 1$.
De hoogte van een stapel bestaande uit n lagen is:
$1 + (n - 1)\sqrt{2} + 1 = 2 + (n - 1)\sqrt{2}$.





5

a Neem bijvoorbeeld
$a_1 = a_2 = \ldots = a_{12} = 1$ en $a_{13} = 11$.
Laten we a_{13} weg dan kunnen we de overige getallen verdelen in twee groepjes van ieder zes getallen met som 6.

Laten we een van de a_i met $i < 13$ weg dan hebben van de resterende twaalf getallen er elf de waarde 1 en één de waarde 11. We kunnen dus weer twee groepjes vormen met gelijke som.

b Laat S de som zijn van alle getallen a_i in het rijtje. Voor *iedere i* geldt: de resterende som $S - a_i$ is te verdelen in twee gelijke gehele delen, en is dus even. Hieruit volgt direct: als S even is, dan zijn alle a_i even; als S oneven is, dan zijn alle *ai* oneven.

c Laat $(a_1, a_2, \ldots, a_{13})$een turbo tam rijtje zijn. Gemakkelijk is in te zien dat dan ook $(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots a_{13})$ een (turbo) tam rijtje is, immers gelijke sommen van zes getallen bij het oorspronkelijke rijtje geven na aftrekking van $6a_1$ gelijke sommen van zes getallen bij het tweede rijtje. Het tweede rijtje bevat een even getal (0) en dus volgt uit b) dat alle getallen even zijn.
Stel nu dat het tweede rijtje een getal ongelijk aan 0 bevat. We kunnen alle getallen door 2 delen en verkrijgen zo een nieuw (turbo) tam rijtje met als eerste getal 0. We delen net zo vaak door 2 tot we een (turbo) tam rijtje hebben met een oneven getal. Dit rijtje bevat dan zowel een even getal (het eerste: 0) als een oneven getal. Dit is in tegenspraak met b). Alle getallen in het tweede rijtje zijn dus gelijk aan 0, en dat betekent $a_1 = a_2 = \ldots = a_{13}$.

Noot

Na 14 jaar het secretariaat van de Nederlandse Wiskunde Olympiade gevoerd te hebben heeft ondergetekende met ingang van 1 januari 1996 het secretariaat overgedragen aan *F. Bosman, p/a Cito, Postbus 1034, 6801 MG Arnhem; telefoon: 026-3521294*. Ondergetekende blijft wel secretaris van de Nederlandse Onderwijs Commissie voor Wiskunde (NOCW).

40 jaar geleden

De strijd om de differentiaal- en integraalrekening in Nederland (1904-heden).
Welke invloed heeft de beweging van KLEIN gehad op het wiskunde-onderwijs in ons land? We kunnen deze invloed, die het sterkst was ten aanzien van het algebra-onderwijs, het gemakkelijkst volgen door na te gaan hoe de strijd om de differentiaal- en integraalrekening in Nederland is verlopen.

De invloed van KLEIN is reeds in de eerste jaren van deze eeuw in ons land merkbaar. VAES en CIKOT behoren tot de pioniers die vrijwel onmiddellijk na KLEIN'S optreden zich voor de infinitesimaalrekening inzetten. Door VAES, KREDIET en QUINT werd in 1904 het WISKUNDIG TIJDSCHRIFT opgericht en in dat tijdschrift verschenen vanaf de eerste jaargang (1904) mededelingen uit buitenlandse tijdschriften van de hand van CIKOT, waardoor de vernieuwingspogingen elders de Nederlandse leraar niet geheel voorbij konden gaan. De strijd voor de differentiaal- en integraalrekening kan in ons land dus reeds op een geschiedenis van meer dan een halve eeuw bogen.

We onderscheiden in deze strijd vier fasen:
a de periode 1904-1908, eindigende met een nederlaag der vernieuwers;
b de periode 1916-1920, eindigende met een partiële overwinning van de vernieuwers t.o.v. het leerplan der gymnasia en een nederlaag t.o.v. het leerplan van de H.B.S.;
c de periode 1926-1940, beheerst door de voorstellen van de commissie BETH-DIJKSTERHUIS, eindigende met een partiële overwinning van de vernieuwingsgedachte t.o.v. het leerplan van de H.B.S.;
d de periode 1946-heden, waarin de pogingen om de infinitesimaalrekening een volwaardige plaats in leer- en eindexamenprogramma te verzekeren, worden voortgezet.

Dr. Joh.H. Wansink in Euclides 31 (1955-1956)

INTERVIEW

Olympisch vuur

Ynske Schuringa

23 juni 1995: alweer is de Wiskunde Olympiade scholenprijs voor het Lorentz-Lyceum in Eindhoven. Twee jaar geleden won de school deze prijs ook al. Nog opmerkelijker is het aantal deelnemers op het Lorentz aan de laatste Wiskunde Olympiade: ruim 100 leerlingen, zelfs tweede- en derdeklassers. Verder valt het op dat ook in andere wiskundewedstrijden het Lorentz prijzen in de wacht sleepte (*). Reden voor uw redactie om eens te gaan onderzoeken hoe de wiskundeleraren van deze school het enthousiasme van hun leerlingen weten op te roepen en zelfs aan te wakkeren. De achterliggende gedachte is dat het 'Olympisch vuur' zo wellicht doorgegeven kan worden en op meer scholen een relatief groot deel van de leerlingen plezier gaat beleven aan de boeiende wiskundepuzzels, die deelnemers aan wedstrijden voorgelegd krijgen.

Het Lorentz-Lyceum is een school voor vwo, op algemene grondslag, met een kleine 800 leerlingen. De 'voortrekker' in de wiskundesectie is **Ægle Hoekstra**, 43 jaar, die graag bereid is te vertellen hoe zijn collega's en hij zoveel leerlingen weten te bewegen tot meedoen aan wedstrijden.

Is er een begin aan te geven van de toename van het aantal wedstrijddeelnemers?
Ruim tien jaar geleden deden ook op het Lorentz maar weinig leerlingen mee - een stuk of vijf per jaar - aan de Wiskunde Olympiade. Andere wiskunde-evenementen voor scholieren waren er toen nog niet. Het aantal deelnemers is vanaf toen echter van jaar tot jaar sterk gegroeid, tot 114 in het voorjaar van 1995.

Hoe is dat gekomen?
Een samenspel van factoren:

a In 1983 ben ik begonnen met een jaarlijkse wiskunde-hobbyclub. Vooral derdeklassers, tussen de vijf en tien leerlingen doorgaans, een wekelijks uurtje met Olympiadesommen of andere vraagstukken, en aan de hand daarvan wat getaltheorie, combinatoriek, kansrekening, meetkunde. De laatste jaren lopen er zelfs twee clubs: beginners en gevorderden. Deelnemende leerlingen doen bijna vanzelfsprekend mee aan de Olympiade en blijven dat doen tot ze in de zesde klas zitten.

b We zijn deelname aan de Olympiade, vooral van derde- en vierdeklassers, bewust en op verschillende manieren gaan stimuleren.

- *We spreken leerlingen individueel aan en geven ze in overweging mee te doen. Dat werkt honderd keer beter dan een hilariteit veroorzakende klassikale aankondiging.*
- *De wiskundesectie looft een schoolprijs (boek) uit voor de beste leerling per klasselaag. Deze prijzen worden op een feestelijke bijeenkomst door de rector uitgereikt.*
- *Sinds een paar jaar hanteren we bovendien de afspraak dat leerlingen hun Olympiadescore (afgetopt bij 10) als proefwerkcijfer mogen laten meetellen voor het rapport.*

c Onze Olympiade-zitting loopt van 12.30 tot 15.30 uur, grotendeels onder schooltijd dus. Dat trekt veel meer deelnemers dan een zitting van 14 tot 17 uur.

d Met de toename van het aantal deelnemers verdween op onze school het elitaire karakter van de wedstrijd, waardoor meer leerlingen gingen meedoen, enz.

Nu het woord elitair toch valt: van collega's van andere scholen hoor ik wel eens dat het op hun scholen niet 'in' is om aan dit soort wedstrijden mee te doen. Hoe ligt dat op het Lorentz?

Wij kunnen profiteren van een heel gunstig klimaat op onze school. Het wordt hier gelukkig door medeleerlingen niet vies gevonden als iemand zijn best doet en ergens goed in is, evenmin word je uitgelachen als het niet lukt. Dat geldt zowel voor de schoolvakken als voor buitenschoolse hobbies. Dit klimaat is van oudsher een aspect van de schoolcultuur en is niet iemands persoonlijke verdienste. Maar we koesteren het wel en proberen het zoveel mogelijk te benutten.



Er zijn vast ook wel eens lage scores van deelnemers. Hoe moedig je die leerlingen aan een volgende keer toch weer mee te doen?
We benadrukken tegenover de leerlingen altijd dat je bij de Wiskunde Olympiade niet kunt ‘afgaan’. Nul punten scoren is geen schande en betekent echt niet dat je slecht zou zijn in wiskunde. En elke positieve score is gewoon goed! Een leerling die ‘niet-zo-goed’ is in wiskunde maar toch wil meedoen, bijvoorbeeld om te proberen zijn/haar score van het jaar daarvoor te verbeteren, moedigen we van harte aan. Hier geldt werkelijk dat deelnemen belangrijker is dan winnen. In de praktijk vallen de scores vaak enorm mee, veelal tot verrassing van zowel de leerling zelf als de docent. (De gemiddelde score van onze 114 deelnemers in maart vorig jaar was trouwens gelijk aan de landelijke gemiddelde score.)

Tegenwoordig is er meer dan alleen de Wiskunde Olympiade. Was deelname aan andere wiskundewedstrijden vanzelfsprekend?
Natuurlijk moedigen we ook op de nieuwe fronten onze leerlingen aan om deel te nemen. De schoolleiding stelt zich hierbij altijd zeer positief en meewerkend op. Voor de Wiskunde-A-lympiade heeft het Lorentz altijd wel drie of vier teams, meer is organisatorisch helaas niet te realiseren. Voor de Kangoeroe-wedstrijd was het Lorentz in 1994 een van de proefscholen. Dit jaar deed, gesponsord (f 2,50 per persoon) door de school, 90% van onze eerste- en tweedeklassers mee aan de Kangoeroe. We hebben de wedstrijd in alle klassen door iedereen laten maken. Net als bij de Olympiade hadden we ook hier binnen de sectie afgesproken dat iedere leerling - ook een nietbetalende - zijn score desgewenst mocht omzetten in een proefwerkcijfer. Daar is ruimschoots gebruik van gemaakt.

Enthousiasme en grote aantallen deelnemers leiden natuurlijk niet automatisch tot het winnen van landelijke prijzen. Speelt toeval ook een rol?
Als school moet je ook nog het geluk hebben op een bepaald moment een aantal zeer getalenteerde leerlingen bij elkaar te treffen. Wat dat betreft hebben we op het Lorentz de laatste jaren niet te klagen. Maar dat wij al deze talenten al snel hadden ontdekt en hen wisten te motiveren, dát is geen toeval.

Het winnen van een prijs is voor de school(leiding) en de betrokken leerlingen natuurlijk enorm leuk en stimulerend, maar het is niet waar het in feite om begonnen is. Dat is wel: leerlingen laten ontdekken dat wiskunde meer is dan wat er in de schoolboeken staat en dat je aan de beoefening ervan veel plezier kunt beleven. Al die verschillende wedstrijden zijn daarvoor niet perse noodzakelijk, maar ze vormen wel een mooie uitdaging en stimulans. En zo zijn we dit jaar voor de brugklassers een ladderwedstrijd gestart met wekelijks enkele ‘weekend-puzzels’. Tot nu toe een groot succes. En een mooie voorbereiding op de Kangoeroe 1996.

Noot

* Resultaten van teams van het Lorentz-Lyceum in de afgelopen jaren:

Nederlandse Wiskunde Olympiade:
winnaar scholenprijs 1993, 1995;
tweede plaats in 1994;
Nederlandse Wiskunde A-lympiade:
winnaar 1995;
Wiskundetoernooi K.U.N., Nijmegen:
winnaar 1993, 1994, 1995;
Mathematische Modelleercompetitie R.U.Limburg, Maastricht:
winnaar 1995.
Kangoeroe-wedstrijd 1995:
winnaar cat. 2vwo;
tweede plaats cat. brugklas.

Felicitatie

Op 21 december 1995 nam NVvW-bestuurslid Freek Mahieu afscheid van zijn school in Boxtel. Bij die gelegenheid kreeg hij een koninklijke onderscheiding: hij is nu Ridder in de Orde van Oranje Nassau. De redactie feliciteert Freek Mahieu van harte met zijn ridderorde!

Recreatie

Opgave 668

In oktober 1961 verscheen, onder redactie van Bruno Ernst en G. Krooshof, het eerste nummer van het wiskundetijdschrift voor jongeren PYTHAGORAS. Nu, in 1996, bestaat dit tijdschrift nog steeds en beleeft het de 35e jaargang. Voor informatie: NIAM B.V., Den Haag (tel. 070 - 3143500). In datzelfde schooljaar vond ook de eerste Nederlandse Wiskunde Olympiade plaats. In het buitenland was men sneller: in 1959 vond al (in Roemenië) de eerste Internationale Wiskunde Olympiade plaats.
Intussen zijn de tijden veranderd en zijn er vele wedstrijden. In 1996 kunnen onze leerlingen aan de volgende wedstrijden meedoen:

De 35e Wiskunde Olympiade.
De 17e Scheikunde Olympiade.
De 15e Natuurkunde Olympiade.
De 7e Wiskunde A-lympiade.
De 6e Biologie Olympiade.
De 6e Informatica Olympiade.
De 5e Universitaire Wiskunde Competitie.
De 3e Europese Kangoeroe Wiskunde Wedstrijd.
De 2e Aardrijkskunde Olympiade.
Misschien zijn er nog wel meer olympiades!

De Universitaire Wiskunde Competitie is bedoeld voor alle studenten, die aan een Nederlandse of een Vlaamse universiteit zijn ingeschreven. De inzendtermijn liep van 1 december 1995 tot 15 januari 1996. Toen ik de opgaven zag, werd ik getroffen door de schoonheid van het tweede vraagstuk:

In elke driehoek (met zijde a tegenover hoek α enz. en oppervlakte S) geldt

$$a^2\cot\alpha + b^2\cot\beta + c^2\cot\gamma = 4S$$

Bewijs dit.

Elk juist bewijs, binnen een maand ingezonden, levert 5 ladderpunten op.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus Valkenboslaan 262-A
2563 EB Den Haag.

Oplossing 665

Recreatie

Het 24-SPEL bestaat uit kaartjes, waarop vier cijfers staan. Die vier cijfers moeten door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen het getal 24 vormen. Als opgave hadden we vijf verschillende kaarten.

Kaart A: $8 \times (2 + 7)/3 = 2 \times (7 + 8 - 3) = (8 - 2) \times (7 - 3) = 8/(7/3 - 2) = 24$

Kaart B: $6 \times (3 + 9 - 8) = (3 + 9) \times (8 - 6) = 8 \times (6 - 9/3) = 8 \times 9/(6 - 3) = 24$

Kaart C: $7 \times (3 + 3/7) = 24$

Kaart D: $8/(3 - 8/3) = 24$

Kaart E: $6/(1 - 3/4) = 24$

Dat de opgave véél moeilijker was dan menigeen zou denken, blijkt uit het feit dat slechts zéér weinigen de volle vijf ladderpunten verdienden. Veel computerprogramma's vonden voor de kaarten C, D of E GEEN oplossing!! Wat onder 'verschillende oplossingen' moet worden verstaan is me nog steeds onduidelijk. Met verschillende deelnemers heb ik gesproken, maar we zijn er niet uitgekomen. Gevoelsmatig vinden we dat bovenstaande oplossingen voor de kaarten A en B verschillend zijn. Maar het echt definiëren ervan is ons niet gelukt.

Met 3, 3, 7 en 7 probeerde *Jan van de Craats*, Oosterhout alle getallen vanaf nul te maken. Over de 100 kun je komen als je ook wortels, logaritmen, machten en faculteiten toelaat.

Het blijkt dat dit spel HET 24 GAME gaat heten en door het Christelijk Pedagogisch Studiecentrum te Hoevelaken wordt uitgegeven. Vanaf december 1995 zijn er CHEE•TOS 24 GAME FLIPPO'S op de markt. Deze flippo's worden gratis meeverpakt in de Hamka's, Wokkels en 3D's Bugles. De voorkant heeft de nummers 291 - 315. Op de achterkant staan 25 verschillende opdrachten. De 12 gemakkelijkste hebben 1 stip: 1135, 1148, 1227, 1334, 1345, 1455, 2245, 2268, 2488, 3457, 4488 en 4555. Dan volgen er 8 met 2 stippen: 1447, 1556, 2267, 2347, 2377, 2378, 3567 en 4568. De moeilijkste 5 hebben 3 stippen: 2357, 2368, 4478, 4777 en 5788. Ik houd me aanbevolen voor meer informatie!







Met 64 punten is deze maand winnaar van een boekenbon van *f* 25,– :

Ton van den Akker
Beemdstraat 2
5384 LB Heesch

Heel hartelijk gefeliciteerd!

▼ Vervolg van pag. 158

horizontale richting. Verder zag Mercator dat hij de hoogte van zijn kaart kon berekenen door die hoogte in een groot aantal kleine stukjes te verdelen en de vertikale uitrekking op zo'n stukje als constant te beschouwen. Tegenwoordig komt hier nog bij het inzicht dat dit met behulp van integraalrekening kan worden afgehandeld.

Bij de hier weergegeven vijf stappen kan opgemerkt worden dat zij niet als een algoritme of standaardprocedure gezien moeten worden, waarvan de afwerking in de aangegeven volgorde gegarandeerd een probleem tot een oplossing zal brengen. De stappen moeten eerder als een leidraad worden gezien, die bij het aanpakken en oplossen van problemen met redelijke kans op succes gevolgd kan worden. Bij de uitvoering zal blijken dat een bepaalde stap een of meer keren opnieuw gedaan zal moeten worden. Ook zal het voorkomen dat bij een probleem het wiskundige model al gegeven is, zodat volstaan kan worden met de stappen 4 en 5. Dat kan overigens nog lastig genoeg zijn.

Van een andere orde is nog het volgende. De integraal- en differentiaalrekening worden in één probleem aan de orde gesteld. Het gaat om het vinden van het verband tussen h en φ. Het verband tussen kleine veranderingen in h en φ, dus tussen Δh en $\Delta\varphi$, wordt vastgesteld, waaruit het verband tussen h en φ in de vorm van een Riemannsom volgt. Jan v.d. Craats heeft eerder in Euclides (Een standbeeld voor Leibniz, nr. 4 van de 64e jaargang, blz. 100-108) een volledige uitwerking hiervan gegeven.

Noot

Dit artikel is een bewerking van een stukje dat geschreven is voor de cursus Inleiding continue wiskunde van de Open universiteit. Met dank aan Jan v.d. Craats, voor zijn waardevolle commentaar en aanvullingen.